Algorithmische Behandlung p-adischer ganzzahliger Gruppenringe

von Florian Eisele

Diplomarbeit in Mathematik
vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im September 2008

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Prof. G. Nebe

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit der Struktur von Gruppenringen endlicher Gruppen über diskreten Bewertungsringen, vor allem mit der algorithmischen Bestimmung ebendieser. Das ist in dieser Formulierung etwas irreführend, denn eigentlich sind wir ja in der Darstellungstheorie hauptsächlich an den Moduln von RG interessiert, da diese Darstellungen von G entsprechen (hier in $\mathrm{End}_R(M)^*$ für R-Moduln M). Der Ring RG ist uns in allen nicht-trivialen Beispielen zu groß, um Fragen wie z. B. "Wieviele nicht-äquivalente Erweiterungen gibt es von zwei gegebenen Moduln?" oder "Wieviele Isomorphietypen von RG-Gittern gibt es in einem vorgegebenem KG-Modul?" algorithmisch beantworten zu können. Wir wollen den Ring RG also gegen einen kleineren Ring (sprich: von kleinerer Dimension) eintauschen, dessen Moduln wir mit denen von RG identifizieren können. Das Konzept, das hierfür nötig ist, ist das der sogenannten "Morita-Äquivalenz" zwischen Ringen. Unser Ziel ist nun genauer formuliert die Bestimmung des (eindeutigen) kleinsten zu RG Morita-äquivalenten Rings, den wir als "Basisordnung" von RG bezeichnen.

Algorithmisch kommen wir im Wesentlichen auf zwei Arten direkt an zu RG Morita-äquivalente Ringe: Zum einen werden wir sehen, dass wenn wir ein Idempotent e in RG kennen, welches noch eine Zusatzbedingung erfüllen muss, dass dann RG Morita-äquivalent zu $e \cdot RG \cdot e$ ist. Die Idempotente bekommen wir aus der Kenntnis von Untergruppen $H \leq G$, denn ist $|H|$ eine Einheit in R, so ist z. B. $\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$ ein Idempotent in RG. Dieses Verfahren, als "Kondensation" bekannt liefert uns schon einmal einen kleineren zu RG Morita-äquivalenten Ring, was für die weitere Rechnung vorteilhaft ist, aber an eine Basisordnung kommen wir so nicht heran. Die zweite Möglichkeit, an Morita-äquivalente Ringe zu kommen, ist, die projektiv-unzerlegbaren RG-Moduln explizit zu bestimmen. Sind $P_1, \ldots, P_s$ Vertreter der Isomorphietypen ebendieser, so ist $\mathrm{End}_{RG}(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s)^{\mathrm{op}}$ eine Basisordnung von RG. Einen Algorithmus zur (effektiven) Konstruktion der projektiv-unzerlegbaren RG-Moduln zu finden ist daher unser Hauptanliegen.

Für diesen Algorithmus ist die Voraussetzung, dass RG ein Gruppenring ist, nicht unbedingt notwendig. Wir brauchen eigentlich nur die Eigenschaft, dass $K \otimes_R RG$, also KG, halbeinfach ist. Wir werden also stets von R-Ordnungen Λ in halbeinfachen K-Algebren A sprechen, und erwarten, dass diese uns eingebettet in die Wedderburnzerlegung von A gegeben sind. Im Falle von Gruppenringen heißt das konkret, dass wir die irreduziblen

Darstellungen von G über K kennen müssen (was natürlich eine starke Zusatzvoraussetzung ist).

Der Punkt ist nun, dass die projektiv-unzerlegbaren Λ-Moduln, sofern R hinreichend groß (oder vollständig) ist, sich allein durch ihre Dimension und die Tatsache, dass sie einfachen "Kopf" haben, charakterisieren lassen. Wir werden zeigen, dass wir unter bestimmten Voraussetzungen aus zwei Λ-Gittern P und Q mit (gleichem) einfachem Kopf ein Amalgam von P und Q konstruieren können, welches ebenfalls einfachen Kopf hat. Entscheidend (im Hinblick auf die Geschwindigkeit des Algorithmus), ist, dass wir hierbei nicht den Teilgitterverband von $P \oplus Q$ durchsuchen, sondern lediglich eine (bestimmte) Kette von Teilmoduln herunterklettern müssen, um dieses Amalgam zu finden.

Die Voraussetzung an P und Q, von der wir oben gesprochen haben, ist, dass es kein Λ-Gitter ungleich $\{0\}$ geben darf, dass epimorphes Bild von beiden ist. Da unser Vorgehen sein wird, den oben erwähnten Algorithmus mit einem bereits konstruierten P einem irreduzibles Gitter Q durchzuführen, bis wir das projektiv-unzerlgbare Gitter erreicht haben, können wir die obige Bedingung umformulieren in: Q soll irreduzibel sein und nicht epimorphes Bild von P. Dass wir so ein Q immer finden können, wenn P nicht bereits das projektiv-unzerlegbare Λ-Gitter mit dem betreffenden Kopf ist, können wir unter recht allgemeinen Voraussetzungen zeigen.

Mit diesen Methoden können wir einige nicht-triviale Basisordnungen bestimmen, z. B. die von $\mathbb{Z}_2 S_7$, $\mathbb{Z}_2 S_8$, $\mathbb{Z}_2 S_9$ und die des Hauptblocks von $\mathbb{Z}_2 M_{12}$. Wir interessieren uns vor allem für die Fälle, die nicht mit den Methoden, die in [Ple83] und [Neb99] verwandt werden, behandelt werden können. Das ist im Wesentlichen dann der Fall, wenn Zerlegungszahlen größer 1 in der Zerlegungsmatrix von Λ vorkommen.

Neben diesen direkten Methoden können wir auch versuchen eine Basisordnung von RG zu bestimmen, indem wir weitere Eigenschaften von RG als R-Ordnung ausnutzen. Hier bietet sich die Tatsache an, dass RG bezüglich der Spurbilinearform, die von der regulären Spur induziert wird, ein selbstduales Gitter ist, und dass sich diese Eigenschaft auf die Basisordnung (bezüglich einer anderen Spurbilinearform) überträgt. Als Ausgangspunkt kann hier die Basisordnung von $\bigoplus_{i=1}^{k} \varepsilon_i RG$ dienen, wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ein Satz zentraler (nicht notwenigerweise primitiver) Idempotente in RG sei mit $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k = 1_{RG}$. Wir können dann einen Algorithmus angeben, der in dieser Basisordnung alle selbstdualen Teilordnungen findet. Im Allgemeinen werden das aber mehrere sein. Hier könnte sich dann ein Algorithmus als nützlich erweisen, der testet, ob zwei solche Ordnungen isomorph sind, um die Zahl der Möglichkeiten für die Basisordnung zu reduzieren. Eindeutige Ergebnisse können wir mit diesen Mitteln jedoch nicht erwarten.

Kapitel 2

Ringe und Ordnungen

2.1 Grundlegende Definitionen & Voraussetzungen

Notation 2.1.1 (Konventionen) *(i) Wenn wir sagen "M ist Modul", so meinen wir stets "M ist* Rechts*modul".*

(ii) Wenn wir zwei Abbildungen $\varphi: X \longrightarrow Y$ und $\psi: Y \longrightarrow Z$, so meinen wir mit "$\varphi \cdot \psi$" die die Komposition "erst φ anwenden, dann ψ", mit $\psi \circ \varphi$ meinen wir die umgekehrte Komposition.

(iii) Endomorphismenringe von Rechts-, Links- und Bimoduln fassen wir stets als Ringe mit der Multiplikation "$\cdot$" auf (nicht "$\circ$"!). So wird jeder Rechts-, Links- und Bimodul zu einem Rechts*modul über seinem Endomorphismenring.*

Definition 2.1.2 (Diskreter Bewertungsring) *Wir nennen einen Hauptidealbereich R mit Qutotientenkörper* $\mathrm{Quo}(R)$ von Charakteristik Null, *der genau ein Primideal $\{0\} \neq \mathfrak{p} = \langle\pi\rangle_R$ besitzt, sodass die Charakteristik von $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ gleich $p > 0$ ist, einen* diskreten Bewertungsring. *Die Exponentenbewertung bezüglich π bezeichnen wir mit ν_π. Wir merken an, dass die Einschränkung an Quotientenkörper- und Restklassenkörpercharakteristik üblicherweise nicht gemacht wird.*

Definition 2.1.3 (Ordnung & Gitter) *Für einen diskreten Bewertungsring R nennen wir eine R-Algebra Λ, die als R-Modul endlich erzeugt und frei ist, eine R-*Ordnung. *Einen endlich erzeugten Λ-Modul M, der als R-Modul frei ist, nennen wir Λ-*Gitter. *Wir nennen ein Λ-Gitter L* irreduzibel, *wenn $\mathrm{Quo}(R) \otimes_R L$ ein einfacher $\mathrm{Quo}(R) \otimes_R \Lambda$-Modul ist.*

Ein R-Gitter L, das in einem $\mathrm{Quo}(R)$-Vektorraum V enthalten ist, nennen wir ein volles *Gitter in V, wenn $L \cdot \mathrm{Quo}(R) = V$ gilt. Analog sprechen wir von vollen Ordnungen in $\mathrm{Quo}(R)$-Algebren.*

Bemerkung 2.1.4 *Seien die Bezeichnungen wie in der obigen Definition. Da R ein noetherscher Ring ist, und ein Λ-Rechtsideal in Λ insbesondere ein R-Teilmodul des e.e. R-Moduls Λ ist, ist Λ ein noetherscher Ring. Insbesondere sind ein- und zweiseitige Λ-Ideale stets endlich erzeugt.*

2.2 Das Jacobson-Radikal

Definition 2.2.1 (Radikal) *Das* (Jacobson-)Radikal $\mathrm{Jac}(A)$ *eines Rings A ist definiert als*

$$\mathrm{Jac}(A) := \bigcap_{S \text{ einfacher } A\text{-Modul}} \mathrm{Ann}_A(S)$$

Äquivalent lässt sich $\mathrm{Jac}(A)$ *charakterisieren als der Schnitt aller maximalen Rechtsideale in A (oder auch aller maximalen Linksideale).*

Bemerkung 2.2.2 *Aus der Definiton folgt sofort, dass wenn R ein diskreter Bewertungsring ist (lokaler Ring reicht auch) mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, dann ist* $\mathrm{Jac}(R) = \mathfrak{p}$.

Lemma 2.2.3 (Nakayama) *Sei A ein Ring, M ein* endlich erzeugter *A-Modul. Angenommen es gilt $M \cdot \mathrm{Jac}(A) = M$, so folgt $M \cong \{0\}$.*

Beweis. Nach Lemma von Zorn existieren in endlich erzeugten Moduln $\neq \{0\}$ maximale (echte) Teilmoduln. Sei N ein solcher in M. Dann ist $\frac{M}{N}$ einfach, also $\mathrm{Jac}(A) \subseteq \mathrm{Ann}_A(\frac{M}{N})$, und demnach $M \cdot \mathrm{Jac}(A) \subseteq N \subsetneqq M$. Wenn $M \not\cong \{0\}$ gilt folgt also $M \cdot \mathrm{Jac}(A) \subsetneqq M$. □

Lemma 2.2.4 (Grundlegendes zum Radikal) *Sei A ein Ring.*

(1) $\mathrm{Jac}(A)$ *ist ein zweiseitiges Ideal in A.*

(2) Ist $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein zweiseitiges Ideal in A, so gilt $\mathrm{Jac}\left(\frac{A}{I}\right) = \frac{\mathrm{Jac}(A)+I}{I}$.

(3) Ist $R \subseteq Z(A)$ ein Teilring des Zentrums von A (das schließt $1_A = 1_R$ ein) und A endlich erzeugt als R-Modul, so gilt $\mathrm{Jac}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

(4) Ist A artinsch (sprich der reguläre A-Modul ist artinsch), so ist $\mathrm{Jac}(A)$ *nilpotent, d. h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit* $\mathrm{Jac}(A)^n = \{0\}$.

(5) Jedes nilpotente zweiseitige Ideal in A ist in $\mathrm{Jac}(A)$ *enthalten (auch dann wenn A nicht artinsch ist).*

Beweis.

(1) $\mathrm{Jac}(A)$ ist sowohl als Schnitt von Rechtsidealen schreibbar wie auch von Linksidealen, also sowohl Rechts- als auch Linksideal.

(2) Die Rechtsideale von $\frac{A}{I}$ stehen nach Homomorphiesatz in Bijektion zu den Rechtsidealen von A, die I umfassen. Insbesondere gilt das auch für die maximalen Rechtsideale, diese umfassen aber gemäß der obigen Definiton allesamt $\mathrm{Jac}(A)$, also auch I. Sei also M die Menge der maximalen Rechtsideale in A (und demnach $\{\frac{\mathfrak{m}+I}{I} \mid \mathfrak{m} \in M\}$ die Menge der maximalen Rechtsideale in $\frac{A}{I}$) so gilt

$$\frac{\mathrm{Jac}(A)+I}{I} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{\left(\bigcap_{\mathfrak{m}\in M} \mathfrak{m}\right)+I}{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in M} \left(\frac{\mathfrak{m}+I}{I}\right) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Jac}\left(\frac{A}{I}\right)$$

(3) Sei S ein einfacher A-Modul. Dann ist $S \cong \frac{A}{\mathfrak{m}}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \leq A$, also insbesondere ist S auch als R-Modul endlich erzeugt. Also gilt nach Nakayama-Lemma $S \cdot \mathrm{Jac}(R) \subsetneq S$. Ferner ist $S \cdot \mathrm{Jac}(R)$ auch wieder ein A-Modul, denn $S \cdot \mathrm{Jac}(R) \cdot a = S \cdot a \cdot \mathrm{Jac}(R) \subseteq S \cdot \mathrm{Jac}(R)$, da $\mathrm{Jac}(R) \subseteq Z(A)$. Da S einfach war ist also $S \cdot \mathrm{Jac}(R) = \{0\}$ und folglich $\mathrm{Jac}(R) \subseteq \mathrm{Ann}_A(S)$. Da S ein beliebiger einfacher A-Modul war folgt $\mathrm{Jac}(R) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

(4) A artinsch impliziert, dass alle Rechtsideale in A endlich erzeugt sind. Also insbesondere alle Potenzen von $\mathrm{Jac}(A)$. Damit folgt aus dem Nakayama-Lemma $\mathrm{Jac}(A)^{k+1} \subsetneq \mathrm{Jac}(A)^k$ für alle k mit $\mathrm{Jac}(A)^k \neq \{0\}$. Man hat also eine absteigende Kette

$$\mathrm{Jac}(A) \supseteq \mathrm{Jac}(A)^2 \supseteq \mathrm{Jac}(A)^3 \supseteq \dots$$

die stationär werden muss da A artinsch ist und wie eben gesehen nur bei $\{0\}$ stationär werden kann. Also finden wir ein n mit $\mathrm{Jac}(A)^n = \{0\}$.

(5) Sei $I \trianglelefteq A$ nilpotent, und S ein einfacher A-Modul. Dann ist $S \cdot I$ ein Teilmodul von S, also entweder $S \cdot I = S$ oder $S \cdot I = \{0\}$. Angenommen es gilt $S \cdot I = S$, so folgt $S \cdot I^k = S$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits gibt es aber ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $I^n = \{0\}$, also $S \cdot I^n = \{0\}$. Also folgt $S \cdot I = \{0\}$ und daher $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(S)$. Da S ein beliebiger einfacher A-Modul war folgt $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

□

Satz 2.2.5 (Krull) *Sei A ein noetherscher Ring und M ein e. e. A-Modul. Dann gilt*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M \cdot \mathrm{Jac}(A)^k = \{0\}$$

Beweis. Teilmoduln endlich erzeugter Moduln über noetherschen Ringen sind wieder endlich erzeugt. Also ist $N := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M \cdot \mathrm{Jac}(A)^k \leq M$ endlich erzeugt. Ferner sieht man leicht dass $N \cdot \mathrm{Jac}(A) = N$ gilt und damit folgt nach Nakayama-Lemma, dass $N = \{0\}$ ist. □

Lemma 2.2.6 (Pro-Nilpotenz des Radikals) *Sei R ein kommutativer Ring sodass $\frac{R}{\mathrm{Jac}(R)}$ artinsch ist und A eine R-Algebra, die als R-Modul endlich erzeugt ist. Dann gilt:*

(1) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$\mathrm{Jac}(A)^n \subseteq \mathrm{Jac}(R) \cdot A$$

(2) Gilt für irgendein zweiseitiges Ideal $I \trianglelefteq A$ dass $I^k \subseteq \mathrm{Jac}(R) \cdot A$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so folgt $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

Beweis. Die Aussagen sind analog zu Lemma 2.2.4 (4) und (5). Zuerst einmal ist $R \subseteq Z(A)$, und damit $\mathrm{Jac}(R) \cdot A = A \cdot \mathrm{Jac}(R)$ ein zweiseitiges Ideal in A. Ferner gilt nach 2.2.4 (3), dass $\mathrm{Jac}(R) \cdot A \subseteq \mathrm{Jac}(A)$. Nach 2.2.4 (2) ist folglich

$$\frac{\mathrm{Jac}(A)}{\mathrm{Jac}(R) \cdot A} = \mathrm{Jac}\left(\frac{A}{\mathrm{Jac}(R) \cdot A}\right)$$

$\frac{A}{\mathrm{Jac}(R)\cdot A}$ kann als $\frac{R}{\mathrm{Jac}(R)}$-Modul aufgefasst werden, ist als solcher endlich erzeugt und damit artinsch. Da jedes $\frac{A}{\mathrm{Jac}(R)\cdot A}$-Rechtsideal auch ein $\frac{R}{\mathrm{Jac}(R)}$-Modul ist, ist $\frac{A}{\mathrm{Jac}(R)\cdot A}$ artinsch (als Ring). Damit folgt nach 2.2.4 (4), dass ein n existiert sodass

$$\left(\frac{\mathrm{Jac}(A)}{\mathrm{Jac}(R) \cdot A}\right)^n = \{0 + \mathrm{Jac}(R) \cdot A\}$$

also $\mathrm{Jac}(A)^n \subseteq \mathrm{Jac}(R) \cdot A$. Damit ist (1) gezeigt. Die Behauptung (2) folgt analog mit 2.2.4 (5). $\square$

Lemma 2.2.7 (Radikal von Teilringen) . *Sei A ein Ring und $B \subseteq A$ ein Teilring. Ferner komme jeder einfache B-Modul als Subquotient eines einfachen A-Moduls vor (d. h. S einfacher B-Modul $\Longrightarrow$ es existiert ein einfacher A-Modul S' und B-Teilmoduln $T' \leq_B T \leq_B S'|_B$ sodass $\frac{T}{T'} \cong_B S$). Dann gilt* $\mathrm{Jac}(A) \cap B \subseteq \mathrm{Jac}(B)$.

Beweis. Sei $x \in \mathrm{Jac}(A) \cap B$. Dann gilt für jeden einfachen A-Modul S', dass $x \in \mathrm{Ann}_A(S') \cap B = \mathrm{Ann}_B(S'|_B)$. Damit annuliert x auch jeden Subquotienten von S', also nach Voraussetzung jeden einfachen B-Modul S. Nach Definition gilt also $x \in \mathrm{Jac}(B)$. $\square$

Definition 2.2.8 *Ein Ring A heißt* halbeinfach, *wenn* $\mathrm{Jac}(A) = \{0\}$ *gilt und A artinsch ist. Wir gehen davon aus, dass dem Leser die wesentlichen Aussagen über halbeinfache Ringe bekannt sind (insbesondere der Satz von Wedderburn). Ansonsten sei auf [Rei75], Kapitel I.7 verwiesen.*

Definition 2.2.9 (Radikal von Moduln) *Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Dann definieren wir das* Radikal von *M als*

$$\mathrm{Jac}(M) := \bigcap_{N \text{ max. Teilmodul von } M} N$$

Lemma 2.2.10 *Sie A ein Ring, $\frac{A}{\mathrm{Jac}(A)}$ artinsch (also halbeinfach), und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{Jac}(M) = M \cdot \mathrm{Jac}(A)$$

Insbesondere kann also der Radikalquotient $\frac{M}{\mathrm{Jac}(M)}$ *(auch* Kopf *von M genannt) als $\frac{A}{\mathrm{Jac}(A)}$-Modul aufgefasst werden, und ist damit halbeinfach, d. h. direkte Summe einfacher A-Moduln.*

Beweis. $\frac{M}{M\cdot\mathrm{Jac}(A)}$ ist ein $\frac{A}{\mathrm{Jac}(A)}$-Modul, also direkte Summe einfacher Moduln. Damit ist der Schnitt aller maximalen Teilmoduln von $\frac{M}{M\cdot\mathrm{Jac}(A)}$ Null. Somit ist $M\cdot\mathrm{Jac}(A)$ der Schnitt aller maximalen Teilmoduln von M, die $M\cdot\mathrm{Jac}(A)$ umfassen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass jeder maximale Teilmodul von M $M\cdot\mathrm{Jac}(A)$ umfasst. Sei also N ein maximaler Teilmodul von M. Dann ist $\frac{M}{N}$ einfach, also $\frac{M}{N}\cdot\mathrm{Jac}(A)=\{0+N\}$. Also gilt $M\cdot\mathrm{Jac}(A)\subseteq N$. □

2.3 Morita-Äquivalenz

In diesem Abschnitt geht es darum zu klären, unter welchen Voraussetzungen für zwei Ringe A und B die Modulkategorien $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_B$ als abelsche Kategorien äquivalent sind, d. h. wann additive Funktoren $\mathcal{F}:\ \mathcal{M}_A\longrightarrow\mathcal{M}_B$ und $\mathcal{G}:\ \mathcal{M}_B\longrightarrow\mathcal{M}_A$ sodass $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ isomorph sind zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{M}_A$ respektive $\mathcal{M}_B$. Unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_B$ in diesem Sinne äquivalent sind können wir explizit Funktoren $\mathcal{F}':\ \mathcal{M}_A\longrightarrow\mathcal{M}_B$ und $\mathcal{G}':\ \mathcal{M}_B\longrightarrow\mathcal{M}_A$ konstruieren, die eine Äquivalenz herstellen. Die Klasse von Äquivalenzen, die wir konstruieren können bezeichnen wir als *Morita-Äquivalenzen.* Dieser Abschnitt richtet sich im Wesentlichen nach [Ben91] Kapitel 2.2.

Definition 2.3.1 *Seien A und B Ringe. Die Modulkategorien $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_B$ heißen* äquivalent *(als abelsche Kategorien), falls kovariante Funktoren $\mathcal{F}:\ \mathcal{M}_A\longrightarrow\mathcal{M}_B$ und $\mathcal{G}:\ \mathcal{M}_B\longrightarrow\mathcal{M}_A$ existieren sodass folgendes erfüllt ist:*

(1) Für beliebige $X,Y\in\mathcal{M}_A$ ist

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)):\ \alpha\mapsto\mathcal{F}(\alpha)$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen. Analog für $\mathcal{G}$. Mit Bedingung (4) unten folgt auch automatisch, dass es sich um Isomorphismen handelt.

(2) $\mathcal{F}$ erhält Kerne und Cokerne, d. h. $\mathcal{F}$ ist exakt.

(3) Für beliebige Indexmengen I und Moduln $M_i\in\mathcal{M}_A$, $N_i\in\mathcal{M}_B$ gilt

$$\mathcal{F}(\bigoplus_{i\in I}M_i)\cong\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}(M_i)\ \text{und}\ \mathcal{G}(\bigoplus_{i\in I}N_i)\cong\bigoplus_{i\in I}\mathcal{G}(N_i)$$

(4) Für jedes $X\in\mathcal{M}_A$ existiert ein Isomorphismus *$s_X\in\mathrm{Hom}_A(X,\mathcal{G}(\mathcal{F}(X)))$ und für jedes $Y\in\mathcal{M}_B$ existiert ein* Isomorphismus *$t_Y\in\mathrm{Hom}_B(Y,\mathcal{F}(\mathcal{G}(Y)))$ sodass die folgende zwei Diagramme für alle $X,Y\in\mathcal{M}_A,\alpha\in\mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $X',Y'\in\mathcal{M}_B,\alpha'\in\mathrm{Hom}_B(X',Y')$ kommutieren:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "s_X"] & Y \arrow[d, "s_Y"] \\ \mathcal{G}(\mathcal{F}(X)) \arrow[r, "\mathcal{G}(\mathcal{F}(\alpha)"] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "t_{X'}"] & Y' \arrow[d, "t_{Y'}"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{G}(X')) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathcal{G}(\alpha')"] & \mathcal{F}(\mathcal{G}(Y')) \end{tikzcd}$$

In dieser Situation nennen wir $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ auch isomorph *zum Identitätsfunktor auf $\mathcal{M}_A$ bzw. $\mathcal{M}_B$.*

Bemerkung 2.3.2 (Strukturerhaltende Eigenschaften) *In der obigen Situation gilt unter Anderem:*

(1) *Sei $M \in \mathcal{M}_A$. Dann ist $\mathrm{End}_A(M) = (\mathrm{Hom}_A(M, M), +, \cdot)$ ein Ring, ebenso $\mathrm{End}_B(\mathcal{F}(M)) = (\mathrm{Hom}_B(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(M)), +, \cdot)$ (wobei $\alpha \cdot \beta$ wie üblich den Endomorphismus "erst α dann β" bezeichne).*

$$\mathrm{End}_A(M) \longrightarrow \mathrm{End}_B(\mathcal{F}(M)) : \ \alpha \mapsto \mathcal{F}(\alpha)$$

wird durch 2.3.1 (1) (liefert $\mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$ und Bijektivität) und der Definition eines Funktors (liefert $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_B$ und $\mathcal{F}(\alpha \cdot \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \cdot \mathcal{F}(\beta)$) zu einem Ringisomorphismus. Also $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_B(\mathcal{F}(M))$.

(2) *$M \in \mathcal{M}_A$ ist projektiv genau dann wenn $\mathcal{F}(M) \in \mathcal{M}_B$ projektiv ist.*

(3) *$M \in \mathcal{M}_A$ ist endlich erzeugt genau dann, wenn $\mathcal{F}(M)$ endlich erzeugt ist.*

(4) *M erzeugt $\mathcal{M}_A$ (d. h. jeder A-Modul in epimorphes Bild einer direkten Summe von M) genau dann wenn $\mathcal{F}(M)$ $\mathcal{M}_B$ erzeugt.*

Definition 2.3.3 *Sei A ein Ring. Ein Modul $M \in \mathcal{M}_A$ der endlich erzeugt und projektiv ist sowie die Kategorie $\mathcal{M}_A$ erzeugt heißt* Progenerator *von $\mathcal{M}_A$.*

Definition 2.3.4 *Wir sagen, für einem Ring A* gilt der Satz von Krull-Schmidt, *wenn jeder endlich erzeugte A-Modul direkte Summe von unzerlegbaren A-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist, und die M_i bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Insbesondere existieren dann nur endlich viele Isomorphietypen $P_1, \ldots, P_k$ von unzerlegbaren projektiven A-Moduln (nämlich die Isomorphietypen von direkten Summanden von A_A).*

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass der Satz von Krull-Schmidt für R-Ordnungen gilt, wo R ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist.

Bemerkung 2.3.5 (1) *Jeder endlich erzeugte freie Modul ist offensichtlich ein Progenerator, also insbesondere existieren Progeneratoren in Modulkategorien. Im Gegensatz zur Eigenschaft eines Moduls, frei zu sein, bleibt die Eigenschaft Progenerator zu sein jedoch unter Äquivalenzen erhalten (wegen Bemerkung 2.3.2 (2),(3) und (4)).*

(2) *Seien A,B Ringe, $\mathcal{F}$ eine Äquivalenz von $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_B$. Wir haben stets $A \cong \mathrm{End}_A(A_A)^{\mathrm{op}}$ (als Ringe). Mit Bemerkung 2.3.2 (1) folgt $A \cong \mathrm{End}_B(\mathcal{F}(A_A))^{\mathrm{op}}$. Mit (1) ist $\mathcal{F}(A_A)$ Progenerator von $\mathcal{M}_B$. Die Modulkategorien von zwei Ringen A und B sind also* höchstens dann äquivalent, wenn B der Endomorphismenring eines Progenerators von A ist. *Ziel dieses Abschnittes ist, das "höchstens dann wenn" im letzten Satz durch ein "genau dann wenn" zu ersetzen.*

(3) *Ein e. e. projektiver Modul M ist genau dann Progenerator wenn für irgendeine endliche Indexmenge I ein freier Modul direkter Summand von $\bigoplus_{i\in I} M$ ist (folgt direkt aus der Definition eines Progenerators und der Tatsache, dass Epimorphismen auf freie/projektive Moduln splitten).*

(4) *Sei A ein Ring in dem der Satz von Krull-Schmidt gilt, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{M}_A$ Vertreter der Isomorphieklassen projektiv unzerlegbarer A-Moduln und P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann lässt sich P schreiben als*

$$P \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus^{k_i} P_i, \quad k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Dann ist P genau dann Progenerator, wenn alle $k_i \geq 1$.

Definition 2.3.6 (Morita-Äquivalenz) *Seien A und B Ringe. A und B heißen* Morita-äquivalent *genau dann wenn ein A-B-Bimodul ${}_AP_B$ und ein B-A-Bimodul ${}_BQ_A$ zusammen mit einem A-A-Bimodul*epi*morphismus*

$$\varphi : {}_AP_B \otimes_B {}_BQ_A \twoheadrightarrow {}_AA_A \ (= A \text{ als Menge})$$

*und einem B-B-Bimodul*epi*morphismus*

$$\psi : {}_BQ_A \otimes_A {}_AP_B \twoheadrightarrow {}_BB_B \ (= B \text{ als Menge})$$

existieren, die die Assoziativitätsrelationen

$$\underbrace{\varphi(p \otimes q)}_{\in A} \cdot \underbrace{p'}_{\in {}_AP_B} = \underbrace{p}_{\in {}_AP_B} \cdot \underbrace{\psi(q \otimes p')}_{\in B} \ \text{ und } \ \underbrace{q'}_{\in {}_BQ_A} \cdot \underbrace{\varphi(p \otimes q)}_{\in A} = \underbrace{\psi(q' \otimes p)}_{\in B} \cdot \underbrace{q}_{\in {}_BQ_A}$$

für alle $p, p' \in {}_AP_B,\ q, q' \in {}_BQ_A$ erfüllen.

Bemerkung 2.3.7 (Anmerkungen zur Definition 2.3.6) *(1) Aus den Assoziativitätsrelationen folgt automatisch, dass φ und ψ auch injektiv sind, und somit ${}_AP_B \otimes_B {}_BQ_A \cong {}_AA_A$ als A-A-Bimodul und ${}_BQ_A \otimes_A {}_AP_B \cong {}_BB_B$ als B-B-Bimoduln.*

(2) *$\mathcal{F} := - \otimes_A {}_AP_B$ und $\mathcal{G} := - \otimes_B {}_BQ_A$ definieren eine Äquivalenz von Kategorien, denn*

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = (- \otimes_A {}_AP_B) \otimes_B {}_BQ_A \cong - \otimes_A ({}_AP_B \otimes_B {}_BQ_A) \cong - \otimes_A {}_AA_A \cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}_A}$$

und analog

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = (- \otimes_B {}_BQ_A) \otimes_A {}_AP_B \cong - \otimes_B ({}_BQ_A \otimes_A {}_AP_B) \cong - \otimes_B {}_BB_B \cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}_B}$$

Beispiel 2.3.8 *Sei A ein Ring, $n \in \mathbb{N}$. Wir setzten $B := A^{n\times n}$. Mit der Notation von Definition 2.3.6 setzen wir ${}_AP_B := A^{1\times n}$, ${}_BQ_A := A^{n\times 1}$. Definiere weiter*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}:\ A^{1\times n}\times A^{n\times 1} &\longrightarrow A:\ (x,y)\mapsto x\cdot y \\ \hat{\psi}:\ A^{n\times 1}\times A^{1\times n} &\longrightarrow A^{n\times n}:\ (x,y)\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation folgt, dass $\hat{\varphi}$ $A^{n\times n}$-abgeglichen und $\mathbb{Z}$-bilinear ist, weswegen $\hat{\varphi}$ über $A^{1\times n}\otimes_{A^{n\times n}} A^{n\times 1}$ faktorisiert, was und eine Abbildung φ wie in 2.3.6 liefert. Weiter gilt $\varphi(ax\otimes y) = \hat{\varphi}(ax,y) = axy = a(xy) = a\varphi(x\otimes y)$ und analog $\varphi(x\otimes ya) = xya = (xy)a = \varphi(x\otimes y)a$, also ist φ ein A-A-Bimodulhomomorphismus. Analog bekommt man ψ aus $\hat{\psi}$. φ ist surjektiv, weil $\hat{\varphi}$ surjektiv ist (offensichtlich). ψ ist surjektiv, weil $\hat{\psi}$ mit zumindest alle Matrizen mit genau einem Eintrag 1 *und sonst Nullen trifft, und* $\mathrm{Bild}(\psi)$ *demnach mindestens deren A-A-Bimodulerzeugnis umfasst, was aber schon $A^{n\times n}$ ist. Die Assoziativitätsrelationen in 2.3.6 folgen ebenso elementar aus der Assoziativität des Matrixprodukt. Also sind A und $A^{n\times n}$ Moritaäquivalent mit den Bimoduln ${}_AA^{1\times n}{}_{A^{n\times n}}$ und ${}_{A^{n\times n}}A^{n\times 1}{}_A$. Dieses Beispiel wird im folgenden Satz verallgemeinert.*

Satz 2.3.9 (Morita) *Seien A ein Ring, M ein Progenerator von $\mathcal{M}_A$ und $B :=$* $\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}$. *Dann sind A und B Morita-äquivalent.*

Beweis. Nehme ${}_BQ_A := M$ (jeder A-Rechtsmodul X ist ein $\mathrm{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$-$A$-Bimodul, wenn man die Endomorphismen durch anwenden operieren lässt). Weiter sei ${}_AP_B :=$ $\mathrm{Hom}_A(M, A_A)$ mit der natürlichen Bimodulstruktur (d. h. sei $f(-)\in {}_AP_B, a\in A, \vartheta\in B$ dann definiere $a\cdot f(-) := [m\mapsto a\cdot f(m)]$ und $f(-)\circ\vartheta := (f\circ\vartheta)(-)$). Definiere φ und ψ als

$$\begin{aligned} \varphi:\ \underbrace{\mathrm{Hom}_A(M,A_A)\otimes_{\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}} M}_{={}_AP_B\otimes_B{}_BQ_A} &\longrightarrow A:\ f\otimes m\mapsto f(m) \\ \psi:\ \underbrace{M\otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A_A)}_{={}_BQ_A\otimes_A{}_AP_B} &\longrightarrow \underbrace{\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}}_{=B}:\ m\otimes f\mapsto [x\mapsto m\cdot f(x)] \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit und dass es sich um Bimodulhomomorphismen handelt überprüft man wie in 2.3.8. Zu den Assoziatitiätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(f\otimes m)\cdot g = f(m)\cdot g = [x\mapsto f(m)\cdot g(x)] = f\circ[x\mapsto m\cdot g(x)] = f\circ\psi(m\otimes g) \\ n\cdot\varphi(f\otimes m) = n\cdot f(m) = [x\mapsto n\cdot f(x)](m) = \psi(n\otimes f)(m) = \psi(n\otimes f)\cdot m \end{aligned}$$

wobei $n, m\in M,\ f,g\in \mathrm{Hom}_A(M,A_A)$ beliebig.

Zur Surjektivität von φ: Wir wissen, dass eine Indexmenge I existiert, sodass es einen Epimorphismus $\alpha\in\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M, A_A)$ gibt. Wähle ein $m\in\alpha^{-1}(1_A)$. Dann existiert eine *endliche* Menge $J\subseteq I$ und $m_j\in M$ für alle $j\in J$ sodass $m = \sum_{j\in J}\iota_j(m_j)$, wobei ι_j die Einbettung von M in die j-te Komponente von $\bigoplus_{i\in I} M$ bezeichne. Also $1_A = \alpha(m) = \sum_{j\in J}\alpha(\iota_j(m_j)) = \sum_{j\in J}\varphi(\alpha\circ\iota_j\otimes m_j)$. Folglich liegt die Eins im Bild von φ und damit ist φ surjektiv.

Nun zu ψ: Wir finden eine endliche Indexmenge I' sodass ein Epimorphismus $\beta \in \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I'} A_A, M)$ existiert, denn M ist nach Definition eines Progenerators endlich erzeugt. Weil M projektiv ist existiert ein $\gamma \in \mathrm{Hom}_A(M, \bigoplus_{i\in I'} A_A)$ mit $\gamma\alpha = \mathrm{id}_M$. Sei für $(e_i)_{i\in I'}$ ein freies Erzeugendensystem von $\bigoplus_{i\in I'} A_A$, und

$$\pi_i : \bigoplus_{k\in I} A_A \twoheadrightarrow A_A : \; e_j \mapsto \delta_{ij} \cdot 1_A$$

die zugehörigen Projektionen. Dann gilt

$$\psi(\sum_{i\in I'} \beta(e_i) \otimes \pi_i \circ \gamma)(m) = \sum_{i\in I'} \beta(e_i) \cdot \pi_i(\gamma(m)) = \left(\sum_{i\in I'} \beta(e_i) \cdot \pi_i\right)(\gamma(m)) = \beta(\gamma(m)) = m$$

und folglich ist $\sum_{i\in I'} \beta(e_i) \otimes \pi_i \circ \gamma$ ein Urbild von id_M unter ψ. Damit ist alles gezeigt. □

Definition 2.3.10 (Basisring) *Sei A ein Ring, für den der Satz von Krull-Schmidt gilt, und $P_1, \ldots, P_n$ Vertreter der Isomorphieklassen projektiv-unzerlegbarer A-Moduln. Nach Bemerkung 2.3.5 (4) ist klar, dass $P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ eindeutiger minimaler Progenerator in $\mathcal{M}_A$ ist (minimal in dem Sinne, dass er direkter Summand jedes anderen Progenerators ist). Mit dem letzten Satz ist also A Moritaäquivalent zu*

$$\mathrm{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_n)^{\mathrm{op}} \cong \begin{bmatrix} \mathrm{End}_A(P_1) & \mathrm{Hom}_A(P_2,P_1) & \mathrm{Hom}_A(P_3,P_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(P_n,P_1) \\ \mathrm{Hom}_A(P_1,P_2) & \mathrm{End}_A(P_2) & \mathrm{Hom}_A(P_3,P_2) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(P_n,P_2) \\ \mathrm{Hom}_A(P_1,P_3) & \mathrm{Hom}_A(P_2,P_3) & \mathrm{End}_A(P_3) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(P_n,P_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_A(P_1,P_n) & \mathrm{Hom}_A(P_2,P_n) & \mathrm{Hom}_A(P_3,P_n) & \cdots & \mathrm{End}_A(P_n) \end{bmatrix}$$

wobei die Multiplikation im rechten Ring durch die übliche Matrixmultiplikation bezüglich "+" und "$\circ$" gegeben ist (durch den "$\circ$" verschwindet das "op"). Wir nennen diesen Ring Basisring *von A (bzw.* Basisalgebra *oder* Basisordnung *wenn A eine Algebra oder Ordnung ist). Man sieht leicht, dass sich der Satz von Krull-Schmidt auf Morita-äquivalente Ringe überträgt, womit alle zu A Morita-äquivalenten Ringe ebenso einen Basisring haben, welcher dann isomorph zum Basisring von A ist.*

Lemma 2.3.11 (Morita-Äquivalenz und Idempotente) *Ist A ein Ring in dem der Satz von Krull-Schmidt gilt und $e \in A$ ein Idempotent, so ist eA projektiv. Ist eA Progenerator von $\mathcal{M}_A$, so ist der Ring eAe Morita-äquivalent zu A. Ist ferner eA minimaler Progenerator so ist eAe der zu A gehörige Basisring.*

Beweis. Mit e Idempotent ist eA projektiv, denn $eA \oplus (1-e)A = A$, d. h. eA ist direkter Summand eines freien Moduls ($eA + (1-e)A = A$ ist klar; sei $x \in eA \cap (1-e)A$, so ist $x = ea = (1-e)b$ für $a, b \in A$, also $x = ea = e^2a = ex = e(1-e)b = 0b = 0 \Longrightarrow eA \cap (1-e)A = \{0\}$, d. h. es handelt sich tatsächlich um eine direkte Summenzerlegung).

Ist eA Progenerator von $\mathcal{M}_A$, dann ist A Morita-äquivalent zu

$$\mathrm{End}_A(eA) = \mathrm{Hom}_A(eA, eA) \overset{\text{als Ringe}}{\cong} eAe$$

□

Lemma 2.3.12 (Radikal in Matrixringen) *Sei A ein Ring, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Jac}(A^{n\times n}) = \mathrm{Jac}(A)^{n\times n}$$

Beweis. Wie wir gesehen haben induziert $\mathcal{F} := - \otimes_A A^{1\times n}$ eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_{A^{n\times n}}$. Insbesondere gilt also: Ist I eine Indexmenge und $\{S_i \mid i \in I\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln, so ist $\{\mathcal{F}(S_i) \cong S_i^{1\times n} \mid i \in I\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen einfacher $A^{n\times n}$-Moduln.

Nun hat man offensichtlich $\mathrm{Ann}_A(S_i)^{n\times n} \subseteq \mathrm{Ann}_{A^{n\times n}}(S_i^{1\times n})$ für alle i. Sei andersherum $X \in \mathrm{Ann}_{A^{n\times n}}(S_i^{1\times n})$ gegeben. Sei $m \in \{1,\ldots,n\}$, dann bekommt man

$$[0\ \ldots\ 0\ \underbrace{S_i}_{m\text{-te Stelle}}\ 0\ \ldots\ 0] \cdot X = \left[\ S_i \cdot X_{m,1}\quad S_i \cdot X_{m,2}\quad \ldots\quad S_i \cdot X_{m,n}\ \right] \overset{!}{=} \{0\}$$

und folglich $X_{m,j} \in \mathrm{Ann}_A(S_i)$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$. Wir haben also

$$\mathrm{Ann}_A(S_i)^{n\times n} = \mathrm{Ann}_{A^{n\times n}}(S_i^{1\times n})$$

gezeigt. Nun setzen wir noch alles zusammen:

$$\mathrm{Jac}(A^{n\times n}) \overset{\text{Def.}}{=} \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}_{A^{n\times n}}(S_i^{1\times n}) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}_A(S_i)^{n\times n} = \left(\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}_A(S_i)\right)^{n\times n} \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Jac}(A)^{n\times n}$$

□

2.4 Ordnungen und Gitter

Lemma 2.4.1 (Fitting) *Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$. Dann gilt*

(i) Ist M artinsch, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{Bild}(\varphi^n) = \mathrm{Bild}(\varphi^{n+1}) = \mathrm{Bild}(\varphi^{n+2}) = \ldots \tag{2.1}$$

und für dieses n gilt $\mathrm{Kern}(\varphi^n) + \mathrm{Bild}(\varphi^n) = M$.

(ii) Ist M noethersch, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+1}) = \mathrm{Kern}(\varphi^{m+2}) = \ldots \tag{2.2}$$

und für dieses m gilt $\mathrm{Bild}(\varphi^m) \cap \mathrm{Kern}(\varphi^m) = \{0\}$.

(iii) Ist M artinsch und noethersch, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$M = \mathrm{Bild}(\varphi^k) \oplus \mathrm{Kern}(\varphi^k)$$

Beweis.

(i) $M \geq \mathrm{Bild}(\varphi) \geq \mathrm{Bild}(\varphi^2) \geq \mathrm{Bild}(\varphi^3) \geq \ldots$ ist eine absteigende Kette von Teilmoduln von M, und da M artinsch ist muss eine solche stationär werden. D. h. es existiert ein n sodass (2.1) erfüllt ist. $\mathrm{Bild}(\varphi^n) + \mathrm{Kern}(\varphi^n) = M$ gilt, da aus $\mathrm{Bild}(\varphi^n) = \mathrm{Bild}(\varphi^{2n})$ folgt, dass zu jedem $v \in M$ ein $v' \in \mathrm{Bild}(\varphi^n)$ existiert mit $\varphi^n(v) = \varphi^n(v')$, und damit $v - v' \in \mathrm{Kern}(\varphi^n)$. $v = v' + (v - v')$ ist dann die gesuchte Darstellung als Summe eines Elements in $\mathrm{Bild}(\varphi^n)$ und eines aus $\mathrm{Kern}(\varphi^n)$.

(ii) $\mathrm{Kern}(\varphi) \leq \mathrm{Kern}(\varphi^2) \leq \mathrm{Kern}(\varphi^3) \leq \ldots$ ist eine aufsteigende Kette von Teilmoduln von M, und da M noethersch ist wir diese stationär. Somit existiert ein m, sodass (2.2) erfüllt ist. Sei $0 \neq v \in \mathrm{Kern}(\varphi^m) \cap \mathrm{Bild}(\varphi^m)$. Dann existiert ein $v' \in M$ mit $\varphi^m(v') = v$, also $v' \in \mathrm{Kern}(\varphi^{2m})$ und $v' \notin \mathrm{Kern}(\varphi^m)$ im Widerspruch zu $\mathrm{Kern}(\varphi^m) = \mathrm{Kern}(\varphi^{2m})$. Also $\mathrm{Kern}(\varphi^m) \cap \mathrm{Bild}(\varphi^m) = \{0\}$.

(iii) Folgt aus (i) und (ii) mit $k = \max\{n, m\}$. □

Lemma 2.4.2 (Liften von Idempotenten) *Sei R ein* vollständiger *diskreter Bewertungsring und Λ eine R-Ordnung. Weiter Sei $N \subseteq \mathrm{Jac}(\Lambda)$ ein zweiseitiges Ideal und $\overline{\Lambda} := \frac{\Lambda}{N}$. Dann gilt: Ist $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ ein Satz orthogonaler Idempotente in $\overline{\Lambda}$ mit*

$$\overline{e_1} + \ldots + \overline{e_n} = 1_{\overline{\Lambda}}$$

dann existieren orthogonale Idempotente $e_1, \ldots, e_n$ in Λ mit

$$e_1 + \ldots + e_n = 1_\Lambda$$

und $e_i + N = \overline{e_i}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Siehe [Rei75], Kapitel 1, Theorem (6.19). □

Folgerung 2.4.3 *Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, Λ eine R-Ordnung und M ein unzerlegbarer Λ-Modul, so ist $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ ein lokaler Ring.*

Beweis. $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ ist als R-Modul endlich erzeugt, denn es kann als Teilmodul von $\mathrm{End}_R(M)$ aufgefasst werden. $E := \frac{\mathrm{End}_\Lambda(M)}{\mathrm{Jac}(\mathrm{End}_\Lambda(M))}$ ist also artinsch, und damit halbeinfach. Wenn E Schiefkörper ist sind wir fertig, denn dann ist offensichtlich $\mathrm{Jac}(\mathrm{End}_\Lambda(M))$ ein maximales Ideal in $\mathrm{End}_\Lambda(M)$. Ansonsten hätte E als halbeinfacher Ring zwei nicht-triviale, orthogonale Idempotente $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ mit $\overline{e_1} + \overline{e_2} = 1_E$. Nach Lemma 2.4.2 gäbe es also zwei nicht-triviale, orthogonale Idempotente e_1, e_2 in $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ mit $e_1 + e_2 = \mathrm{id}_M$. Dann wäre $M = e_1(M) \oplus e_2(M)$ eine nicht-triviale direkte Summenzerlegung, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von M. □

Satz 2.4.4 (Krull-Schmidt) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring und Λ eine R-Ordnung. Weiter sei M ein endlich erzeugter Λ-Modul. Seien*

$$M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \tag{2.3}$$

und

$$M = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m \tag{2.4}$$

zwei Zerlegungen von M als direkte Summe unzerlegbarer Λ-Moduln (eine solche Zerlegung existiert stets, da M endlichen Rang als R-Modul hat). Dann gilt $n = m$ und es existiert eine Permutation $\pi \in S_n$ mit $N_i \cong L_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Definiere $\pi_{N_i} \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$ und $\pi_{L_i} \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$ $(i = 1, \ldots, n)$ als die Projektionen auf die jeweiligen N_i's bzw. L_i's. Dann gilt

$$\mathrm{id}_{N_1} = (\mathrm{id}_M \cdot \pi_{N_1})|_{N_1} = \sum_{i=1}^{m} \pi_{L_i}|_{N_1} \cdot \pi_{N_1}$$

Da id_{N_1} eine Einheit in $\mathrm{End}_\Lambda(N_1)$ ist, und $\mathrm{End}_\Lambda(N_1)$ nach Folgerung 2.4.3 ein lokaler Ring, folgt, dass nicht alle $\pi_{L_i}|_{N_1} \cdot \pi_{N_1}$ Nichteinheiten sein können. Sei o.B.d.A. (durch Umnummerierung der L_i) $\pi_{L_1}|_{N_1} \cdot \pi_{N_1}$ eine Einheit in $\mathrm{End}_\Lambda(N_1)$. Insbesondere ist, da $\mathrm{Bild}(\pi_{L_1}) = L_1$, $\pi_{N_1}|_{L_1}$ surjektiv. Wir haben also eine kuruze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(\pi_{N_1}|_{L_1}) \longrightarrow L_1 \stackrel{\pi_{N_1}|_{L_1}}{\longrightarrow} N_1 \longrightarrow 0$$

und wegen $((\pi_{L_1}|_{N_1} \cdot \pi_{N_1}|_{L_1})^{-1} \cdot \pi_{L_1}|_{N_1}) \cdot \pi_{N_1}|_{L_1} = \mathrm{id}_{N_1}$ splittet diese, also $L_1 \cong N_1 \oplus \mathrm{Kern}(\pi_{N_1}|_{L_1})$. Wegen der vorausgesetzten Unzerlegbarkeit von L_1 muss also gelten $\mathrm{Kern}(\pi_{N_1}|_{L_1}) = \{0\}$, womit $\pi_{N_1}|_{L_1}$ einen Isomorphismus zwischen N_1 und L_1 induziert.

Weiterhin gilt $L_1 \cap (N_2 \oplus \ldots \oplus N_m) = \{0\}$, denn $N_2 \oplus \ldots \oplus N_n = \mathrm{Kern}(\pi_{N_1})$, und $L_1 \cap \mathrm{Kern}(\pi_{N_1}) = \mathrm{Kern}(\pi_{N_1}|_{L_1}) = \{0\}$. Außerdem gilt $L_1 + N_2 \oplus \ldots \oplus N_n = \pi_{N_1}(L_1) + N_2 \oplus \ldots \oplus N_n = N_1 + N_2 \oplus \ldots \oplus N_n = M$. Also gilt

$$M = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m = L_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$$

und damit $L_2 \oplus \ldots \oplus L_m \cong \frac{M}{L_1} \cong N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$. Die Behauptung folgt nun über Induktion nach n und m (denn der Fall $n = m = 1$ ist trivial). □

Satz 2.4.5 (Struktur der projektiv-unzerlegbaren Λ-Moduln) *Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring und Λ eine R-Ordnung, so stehen die Isomorphieklassen der unzerlegbaren projektiven Λ-Moduln in Bijektion zu den Isomorphieklassen der einfachen Λ-Moduln. Genauer:*

(i) Ist P ein (über R endlich erzeugter) unzerlegbarer projektiver Λ-Modul, so ist $S := \frac{P}{\mathrm{Jac}(P)}$ einfach. Ist Q ein weiterer projektiv-unzerlegbarer Λ-Modul, für den auch $\frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)} = S$ gilt so folgt $Q \cong P$.

(ii) Umgekehrt existiert zu jedem einfachen Λ-Modul S ein (über R endlich erzeugter) unzerlegbarer projektiver Λ-Modul P mit $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} \cong S$. Es existiert ein primitives Idempotent in Λ mit $P \cong e\Lambda$.

Beweis.

(i) $\hat{P} := \frac{P}{\mathrm{Jac}(P)}$ ist ein $\hat{\Lambda} := \frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$-Modul, und da $\hat{\Lambda}$ halbeinfach ist, ist $\hat{P}$ direkte Summe einfacher $\hat{\Lambda}$-Moduln. Angenommen $\hat{P}$ wäre nicht einfach, also $\hat{P} = S \oplus T$ für zwei $\hat{\Lambda}$-Moduln $S, T \neq \{0\}$. Bezeichne $\nu_P : P \to S \oplus T$ den natürlichen Epimorphismus. Dann haben wir also einen Λ-Epimorphismus $\varphi_S = \nu_P \pi_S : \; P \twoheadrightarrow S$, wo $\pi_S : \; S \oplus T \twoheadrightarrow S$ die Projektion auf die erste Komponente bezeichne. Dann bekommen wir aufgrund der Projektivität von P einen Homomorphismus ψ_S sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "\nu_P"] & S \oplus T \\ & P \arrow[ul, "\psi_S"] \arrow[u, "\varphi_S \oplus 0"'] \end{tikzcd}$$

Setzte nun $\overline{P} := \frac{P}{P \cdot \mathfrak{p}}$. Dann bekommen wir einen Ringepimorphismus $\varepsilon : \; \mathrm{End}_\Lambda(P) \twoheadrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(\overline{P})$, indem wir ein $\tau \in \mathrm{End}_\Lambda(P)$ auf den Endomorphismus

$$\varepsilon(\tau) : \; \overline{P} \longrightarrow \overline{P} : \; m + P \cdot \mathfrak{p} \mapsto \tau(m) + P \cdot \mathfrak{p}$$

Denn sei $\overline{\tau} \in \mathrm{End}_\Lambda(\overline{P})$, so existiert ein $\tau \in \mathrm{End}_\Lambda(P)$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \overline{P} \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \overline{P} \\ P \arrow[u, "\nu_{\mathfrak{p}}"] \arrow[ur, "\nu_{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\tau}"] \arrow[r, "\tau"] & P \arrow[u, "\nu_{\mathfrak{p}}"'] \end{tikzcd}$$

wo $\nu_{\mathfrak{p}}$ den natürlichen Epimorphismus von P auf $\overline{P}$ bezeichne. Dieses τ ist klarerweise ein Urbild von $\overline{\tau}$ unter ε, was die Surjektivität von ε zeigt. Ferner gilt $\mathrm{Kern}(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Jac}(\mathrm{End}_\Lambda(P))$, da wir wissen, dass $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ lokal ist (und damit können wir später Lemma 2.4.2 anwenden).

Damit bekommen wir einen Homomorphismus $\varepsilon(\psi_S)$. Es gilt $\varepsilon(\psi_S) \cdot \nu_{\overline{P}} \cong S \not\cong \frac{\overline{P}}{\mathrm{Jac}(\overline{P})} \cong S \oplus T$, wo $\nu_{\overline{P}}$ den natürlichen Epimorphismus von $\overline{P}$ auf $\frac{\overline{P}}{\mathrm{Jac}(\overline{P})} \cong \frac{P}{\mathrm{Jac}(P)}$ bezeichne. Also ist $\varepsilon(\psi_S)$ nicht surjektiv.

Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Bild}(\varepsilon(\psi_S)^k \cdot \nu_{\overline{P}}) = S \neq \{0\} \tag{2.5}$$

womit $\varepsilon(\psi_S)$ auch nicht nilpotent ist. Denn es gilt $\mathrm{Bild}(\varepsilon(\psi_S)^k \cdot \nu_{\overline{P}}) = \mathrm{Bild}(\psi_S^k \cdot \nu_P)$, und $\psi_S^k \nu_P = \psi_S^{k-1} \cdot (\varphi_S \oplus 0) = \psi_S^{k-1} \cdot \nu_P \cdot (\pi_S \oplus 0) = \psi_S^{k-1} \nu_P$ für alle $k \geq 2$.

Mit Lemma 2.4.1 existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{P} = \underbrace{\mathrm{Bild}(\varepsilon(\psi_S)^k)}_{=:\hat{S}} \oplus \underbrace{\mathrm{Kern}(\varepsilon(\psi_S)^k)}_{=:\hat{T}}$$

und die Zerlegung ist nicht-trivial, da $\varepsilon(\psi_S)^k$ weder bijektiv noch Null ist, wie wir eben gesehen haben.

Somit sind die Projektionen $\pi_{\hat{S}}$ und $\pi_{\hat{T}}$ auf $\hat{S}$ und $\hat{T}$ nicht-triviale orthogonale Idempotente in $\mathrm{End}_\Lambda(\overline{P})$ mit $\pi_{\hat{S}} + \pi_{\hat{T}} = \mathrm{id}_{\overline{P}}$, womit wir nach Lemma 2.4.2 nicht-triviale, orthogonale Idempotente $e_{\hat{S}}$ und $e_{\hat{T}}$ mit $e_{\hat{S}} + e_{\hat{T}} = \mathrm{id}_P$ in $\mathrm{End}_\Lambda(P)$ bekommen. Damit ist $P = e_{\hat{S}}(P) \oplus e_{\hat{T}}(P)$ eine nicht-triviale direkte Summenzerlegung von P, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit.

Zum zweiten Teil der Behauptung: Ist Q ein projektiver Λ-Modul mit $\frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)} \cong \frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} = S$, so bekommen wir aus der Projektivität von Q einen Homomorphismus $\psi : Q \to P$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, two heads, "\nu_P"] & S \\
 & Q \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, "\nu_Q"']
\end{tikzcd}$$

wo ν_S und ν_P die natürlichen Epimorphismen auf den Radiaklquotienten bezeichnen. Damit das Diagramm kommutiert muss $\psi \cdot \nu_P = \nu_Q \neq \{0\}$ gelten, also $\mathrm{Bild}(\psi) \nsubseteq \mathrm{Kern}(\nu_P) = \mathrm{Jac}(P)$, und da $\mathrm{Jac}(P)$ eindeutiger maximaler Teilmodul von P ist muss $\mathrm{Bild}(\psi) = P$ gelten. P ist damit epimorphes Bild von Q, und da Epimorphismen auf projektive Moduln stets splitten ist P direkter Summand von Q, und da Q per Voraussetzung unzerlegbar ist muss $P \cong Q$ gelten.

(2) Wir können jeden einfachen Λ-Modul S als Epimorphes Bild des regulären Λ-Moduls schreiben. Sei $\psi : \Lambda_\Lambda \longrightarrow S$ ein solcher Epimorphismus. Es existiert nach Satz 2.4.4 eine Zerlegung von Λ_Λ als direkte Summe unzerlegbarer Λ-Moduln

$$\Lambda_\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$$

Nun kann die Einschränkung von ψ auf P_i nicht für alle i Null sein, weil dann ψ Null wäre. Also existiert ein i mit $\psi|_{P_i} \longrightarrow S$ ungleich Null und damit epimorph. Also $\mathrm{Jac}(P_i) \subseteq \mathrm{Kern}(\psi|_{P_i})$, da $\mathrm{Kern}(\psi|_{P_i})$ maximal ist in P_i, und da $\mathrm{Jac}(P_i)$ nach (i) ebenfalls maximal in P_i ist folgt $\mathrm{Jac}(P_i) = \mathrm{Kern}(\psi|_{P_i})$ und damit $\frac{P_i}{\mathrm{Jac}(P_i)} \cong S$. Die Projektion $\pi_i : \Lambda_\Lambda \longrightarrow P_i$ liegt in $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_\Lambda) \cong \Lambda^{\mathrm{op}}$, folglich existiert ein Element $e_i \in \Lambda$ mit $e_i a = \pi_i(a)\ \forall a \in \Lambda$, also $P_i = e_i A$. $\square$

Definition 2.4.6 (Projektive Decke) *Seien die Voraussetzungen wie in 2.4.5 und S ein einfacher Λ-Modul. Den bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten projetiv unzerlegbaren Λ-Modul P mit $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} \cong S$ bezeichnen wir als projektive Decke von S und wir schreiben dafür $\mathcal{P}(S)$.*

Definition 2.4.7 (Zerlegungszahlen) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ und Quotientenkörper $K := \mathrm{Quo}(R)$, Λ eine R-Ordnung, $\overline{\Lambda} := \frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ und $A := K \otimes_R \Lambda$ halbeinfach . Weiter seien $X(A) = \{V_1, \ldots, V_n\}$ Vertreter der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln und $X(\overline{\Lambda}) = \{S_1, \ldots, S_m\}$ Vertreter der Isomorphieklassen einfacher $\overline{\Lambda}$-Moduln. Sei zu jedem V_i ein Λ-Gitter L_i mit $K \otimes_R L_i \cong V_i$ gegeben. Wir definieren die* Zerlegungsmatrix *von Λ also Matrix in $D \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{X(A)\times X(\overline{\Lambda})}$ mit den Einträgen*

$$D_{V_i,S_j} := \text{Vielfachheit von } S_j \text{ als Kompositionsfaktor von } \frac{L_i}{L_i\mathfrak{p}} \tag{2.6}$$

Beweis der Wohldefiniertheit. Man sieht leicht, dass

$$D_{V_i,S_j} = \frac{\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), \frac{L_i}{L_i\mathfrak{p}}\right)}{\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{End}_\Lambda(S_j)} \tag{2.7}$$

gilt, denn $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), -)$ ist exakt, und damit gilt für einen Λ-Modul M mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda(M)$ und Teilmodul N dass

$$\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), M) = \dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), N) + \dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), \frac{M}{N}\right)$$

Somit reicht es zu zeigen, dass $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), S_k) = \delta_{jk} \cdot \dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{End}_\Lambda(S_j)\ \forall k$. Nun faktorisiert jeder Homomorphismus von $\mathcal{P}(S_j)$ über $\frac{\mathcal{P}(S_j)}{\mathrm{Jac}(\mathcal{P}(S_j))} \cong S_j$, und damit $\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), S_k) = \dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}(S_j, S_k)$ womit die Behauptung (2.7) gezeigt ist.

Um zu zeigen dass die rechte Seite in (2.7) unabhängig von der Wahl von L_i ist betrachten wir die folgende Kette von Identitäten

$$\begin{aligned} &\dim_{\frac{R}{\mathfrak{p}}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), \frac{L_i}{L_i\mathfrak{p}}\right) \\ \overset{(1)}{=}\ &\dim_R \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), L_i) \\ \overset{(2)}{=}\ &\dim_K \mathrm{Hom}_A(K \otimes_R \mathcal{P}(S_j), V_i) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dabei folgt (1) aus der Tatsache, dass wegen der Exaktheit von $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_j), -)$ gilt

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), \frac{L_i}{L_i\mathfrak{p}}\right) \cong_R \frac{\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), L_i\right)}{\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), L_i\mathfrak{p}\right)} \cong_R \frac{\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), L_i\right)}{\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\mathcal{P}(S_j), L_i\right)\cdot\mathfrak{p}}$$

und (2) daraus, dass allgemein für zwei Λ-Gitter X und Y gilt

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y) = \mathrm{Hom}_{K\otimes_R\Lambda}(K\otimes_R X, K\otimes_R Y)\cap\mathrm{Hom}_R(X, Y)$$

und dass schneiden eines d-Dimensionalen Teilraums von $\mathrm{Hom}_K(K\otimes_R X, K\otimes_R Y)$ mit $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ liefert offensichtlich einen R-Modul von Rang d.

Die rechte Seite von (2.8) ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der L_i, womit die Wohldefiniertheit der Zerlegungszahlen gezeigt ist. □

Satz 2.4.8 (Brauerreziprokität) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, $K := \mathrm{Quo}(R)$, $F := \frac{R}{\mathfrak{p}}$, Λ eine R-Ordnung mit $A := K\otimes_R\Lambda$ halbeinfach und $\overline{\Lambda} := \frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$. Weiter seien $X(A) = \{V_1, \dots, V_n\}$ Vertreter der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln und S sei ein einfacher Λ-Modul. Wir betrachten $K\otimes_R\mathcal{P}(S)$ als A-Modul. Da A halbeinfach ist existieren $d_{V_i,S}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ sodass*

$$K\otimes_R\mathcal{P}(S)\cong_A\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus^{d_{V_i,S}} V_i$$

Für diese $d_{V_i,S}$ gilt

$$d_{V_i,S} = D_{V_i,S}\cdot\frac{\dim_F\mathrm{End}_\Lambda(S)}{\dim_K\mathrm{End}_A(V_i)} \tag{2.9}$$

Beweis. Wir setzten in (2.9) für $D_{V_i,S}$ die rechte Seite von (2.7) ein und erhalten

$$d_{V_i,S} = \frac{\dim_F\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S), \frac{L_i}{L_i\cdot\mathfrak{p}})}{\dim_K\mathrm{End}_A(V_i)}$$

wo L_i wieder ein Λ-Gitter sei mit $K\otimes_R L_i\cong_A V_i$. Nun setzen wir noch für den Zähler die rechte Seite von (2.8) ein und erhalten

$$d_{V_i,S} = \frac{\dim_K\mathrm{Hom}_A(K\otimes_R\mathcal{P}(S), V_i)}{\dim_K\mathrm{End}_A(V_i)}$$

Das ist aber offensichtlich eine wahre Aussage mit demselben Argument mit dem wir (2.7) bewiesen haben. □

Folgerung 2.4.9 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4.8 gilt: Für jeden einfachen Λ-Modul existiert ein einfacher A-Modul V mit $d_{V,S}\neq 0$, und damit nach (2.9) auch $D_{V,S}\neq 0$ (d. h. in der Zerlegungsmatrix gibt es keine Nullspalten).*

Beweis. Wäre $d_{V,S} = 0$ für alle einfachen A-Moduln V, so wäre nach Definition der $d_{V,S}$ der A-Modul $K \otimes \mathcal{P}(S) = \{0\}$. Da $\mathcal{P}(S)$ als direkter Summand von Λ_Λ R-torsionsfrei ist folgt daraus, dass $\mathcal{P}(S) = \{0\}$, ein Widerspruch zu $\frac{\mathcal{P}(S)}{\mathrm{Jac}(\mathcal{P}(S))} \cong S$. □

Folgerung 2.4.10 (Radikal von Teilordnungen) *Aus der Wohldefiniertheit der Zerlegungszahlen folgt insbesondere folgende Aussage: Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, $K = \mathrm{Quo}(R)$ und A eine endlich-dimensionale, halbeinfache K-Algebra, und Λ, Γ zwei volle R-Ordnungen in A mit $\Lambda \subseteq \Gamma$, so gilt $\mathrm{Jac}(\Gamma) \cap \Lambda \subseteq \mathrm{Jac}(\Lambda)$.*

Beweis. Nach Lemma 2.2.7 ist nur zu zeigen, dass jeder einfache Λ-Modul als Subquotient eines einfachen Γ-Moduls vorkommt. Offenbar reicht es dazu, zu zeigen, dass für jeden einfachen Λ-Modul S einen Γ-Modul M endlicher Kompositionslänge (als Γ sowie als Λ-Modul) gibt, sodass S als Kompositionsfaktor von $M|_\Lambda$ vorkommt.

Nach Folgerung 2.4.9 existiert ein einfacher A-Modul V mit $D_{V,S} \neq 0$. Wählen wir ein Γ-Gitter L in V, so ist $M := \frac{L}{L\mathfrak{p}}$ ein Γ-Modul endlicher Kompositionslänge (da schon als R-Modul von endlicher Länge). Ferner gilt nach Definition der Zerlegungszahlen, dass S mit Vielfachheit $D_{V,S} > 0$ in $M|_\Lambda$ vorkommt. □

Definition 2.4.11 (Reduziertes charakteristisches Polynom) *Sei K ein Körper der Charakteristik 0, und A eine endlich-dimensionale, einfache K-Algebra mit $Z(A) = K \cdot 1_A$. Bezeichne mit $E := \overline{K}$ den algebraischen Abschluss von K. Dann wissen wir, dass E den Ring A zerfällt, d. h. $E \otimes_K A \cong E^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (es gilt $\dim_K A = n^2$). Wir fixieren eine Einbettung $\iota : \ A \hookrightarrow E^{n\times n}$. Nun definieren wir das* reduzierte charakteristische Polynom *eines Elements $a \in A$ wie folgt:*

$$\mathrm{red.\,char.\,pol.}_{A/K}(a) := \mathrm{char.\,pol.}(\iota(a))$$

Das reduzierte charakteristische Polynom liegt stets in $K[x]$. Entsprechend definieren wir die reduzierte Spur *von a als*

$$\mathrm{tr.\,red.}_{A/K}(a) := \mathrm{tr}(\iota(a))$$

und die reduzierte Norm *als*

$$\mathrm{nr.\,red.}_{A/K}(a) := \det(\iota(a))$$

Beide liegen für alle $a \in A$ im Grundkörper K.

Beweis. Das das reduzierte charakteristische Polynom wohldefiniert ist folgt daraus, dass die Einbettung $A \hookrightarrow E \otimes_K A$ kanonisch ist, und jeder Automorphismus von $E^{n\times n}$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}(n, E)$ induziert wird, also das charakteristische Polynom unverändert lässt.

Zeigen wir nun, dass es in $K[x]$ liegt. Bezeiche $\Delta: A \longrightarrow K^{n^2\times n^2}$ die reguläre Darstellung von A (natürlich nur bis auf Konjugation in $\mathrm{GL}(n^2,K)$ eindeutig bestimmt). Δ setzt sich fort zu einem $\mathrm{id}_E \otimes\Delta: E\otimes_K A \longrightarrow E^{n^2\times n^2}$. Wir wissen, dass $E\otimes_K A$ bis auf Konjugtion nur eine irreduzible Darstellung $\hat\iota: E\otimes_K A\longrightarrow E^{n\times n}$ hat (und wir diese o.B.d.A. als E-lineare Forsetzung von ι wählen können, also $\hat\iota|_A=\iota$), und jede andere Darstellung vermöge Basiswechel auf die Form

$$E\otimes_K A\longrightarrow E^{n\cdot k\times n\cdot k}:\ a\mapsto \mathrm{Diag}(\underbrace{\hat\iota(a),\ldots,\hat\iota(a)}_{k \text{ mal}})\quad \text{für ein } k\in\mathbb{N}$$

gebracht werden kann. Somit existiert ein $T\in \mathrm{GL}(n^2,E)$ sodass

$$T^{-1}\cdot \mathrm{id}_E\otimes\Delta(a)\cdot T=\mathrm{Diag}(\underbrace{\hat\iota(a),\ldots,\hat\iota(a)}_{n \text{ mal}})\quad \forall a\in E\otimes_K A$$

und damit gilt insbesondere

$$\text{char. pol.}(\Delta(a))=\text{char. pol.}(\mathrm{id}_E\otimes\Delta(1\otimes a))=(\text{char. pol.}(\iota(a)))^n$$

Da char. pol.$(\Delta(a))$ trivialerweilse in $K[x]$ liegt, und K perfekt ist (wegen Charaketristik 0), folgt, dass char. pol.$(\iota(a))$ bereits in $K[x]$ liegen muss.

Dass tr. red. und nr. red. in K liegen ist eine triviale Forgerung daraus, denn sie kommen als Koeffizienten in red. char. pol. vor. □

Bemerkung 2.4.12 *Notation wie in der vorangehenden Definition. Für alle $a,b\in A,\alpha,\beta\in K$ gilt:*

(i) $\text{tr. red.}_{A/K}(ab)=\text{tr. red.}_{A/K}(ba)$

(ii) $\text{tr. red.}_{A/K}(\alpha\cdot a+\beta\cdot b)=\alpha\cdot\text{tr. red.}_{A/K}(a)+\beta\cdot\text{tr. red.}_{A/K}(b)$

(iii) $\text{red. char. pol.}_{A/K}(a)|_{x=a}=0$

Die obigen Aussagen sind unmittelbar klar, denn die reduzierte Spur und das reduzierte charakteristische Polynom von a sind Spur bzw. charakteristisches Polynom im Sinne der linearen Algebra von $\iota(a)\in E^{n\times n}$.

Definition 2.4.13 (Spurbilinearform & Diskriminante) *Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und A eine halbeinfache K-Algebra mit Wedderburnkomponenten $A_i\cong D_i^{k_i\times k_i}$, $i=1,\ldots,n$ und zugehörigen zentral-primitiven Idempotenten ε_i, wo D_i Schiefkörper endlicher Dimension über K seien. Dann ist $Z(A)\cong\bigoplus_i Z(D_i)\cong\bigoplus_i K_i$, wo $K_i:=Z(D_i)$ endliche Körpererweiterungen von K sind. Weiter sei $u\in Z(A)$ eine Einheit. Dann definieren wir eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf A durch*

$$T_u:\ A\times A\longrightarrow K:\ (x,y)\mapsto\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_{K_i/K}\,\text{tr. red.}_{A_i/K_i}(\varepsilon_i\cdot u\cdot x\cdot y)$$

Sei nun R ein diskreter Bewertungsring mit $\mathrm{Quo}(R) = K$. Ist X ein volles R-Gitter A, so definieren wir das duale Gitter $X^{\sharp,u}$ von X bezüglich T_u *als*

$$X^{\sharp,u} := \{a \in A \mid T_u(a, X) \subseteq R\}$$

Wenn die Wahl von u aus dem Kontext klar ist schreiben wir auch $X^\sharp$ statt $X^{\sharp,u}$. Wir nennen X selbstdual *bezüglich u, wenn $X = X^{\sharp,u}$. Ferner definieren wir für ein volles R-Gitter X in A die* Diskriminante *von X bezüglich u als*

$$\mathrm{discr}_u X := \det({}_B(T_u)^B) \cdot R \quad \textit{(ein gebrochenes Ideal in } K\textit{)}$$

wo B eine R-Basis von X sei und ${}_B(T_u)^B$ die Grammatrix von T_u bezüglich dieser Basis bezeichne.

Beweis der Wohldefiniertheit. Zu zeigen ist ersteinmal, dass das duale Gitter wirklich ein Gitter ist. Dass es ein R-Modul ist, ist klar, aber wir müssen überprüfen, dass es auch endlich erzeugt ist. Sei also X ein volles R-Gitter in A und B eine R-Basis von X (und damit auch eine K-Basis von A). Da u eine Einheit in $Z(A)$ ist, ist klar, dass $T_u(-,=)$ nicht ausgeartet ist. Wir können also $Q := ({}_B(T_u)^B)^{-1} \in K^{\dim_K A \times \dim_K A}$ bilden. Offenbar gilt für ein $y_B \in R^{1\times \dim_K A}$ dass $R^{1\times \dim_K A} \cdot {}_B(T_u)^B \cdot {}^B y \subseteq R$ (wobei ${}^B y := (y_B)^\top$) genau dann, wenn $y_B \in R^{1\times \dim_K A} \cdot Q^\top$. Folglich gilt

$$X^{\sharp,u} = \sum_{i=1}^{\dim_K A} R \cdot \left(\sum_{j=1}^{\dim_K A} Q_{j,i} \cdot B_j \right) \tag{2.10}$$

was offensichtlich ein Gitter ist. Wir merken noch an, dass wir mit der obigen Formel $X^{\sharp,u}$ explizit ausrechnen können.

Wir zeigen nun noch, dass die Diskriminate unabhängig von der Wahl von B in der obigen Definition ist. Sei dazu C eine weitere R-Basis von X. Dann ist $\alpha := \det({}_B \mathrm{id}_C) \in R^*$, also $\det({}_C(T_u)^C) = \det({}_C \mathrm{id}_B \cdot {}_B(T_u)^B \cdot {}^B \mathrm{id}^C) = \det({}_B(T_u)^B) \cdot \alpha^2$. Die Determinanten unterscheiden sich also nur um eine Einheit in R und erzeugen daher dasselbe Ideal. □

Bemerkung 2.4.14 (Eigenschaften) *Seien die Voraussetzungen wie in Definition 2.4.13*

(i) Für $a, b, c \in A$ gilt $T_u(ab, c) = T_u(a, bc)$ und $T_u(ab, c) = T_u(b, ca)$.

(ii) Sei (wie in Definition 2.4.13)

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{D_i^{k_i \times k_i}}_{=:A_i}$$

und $K_i := Z(D_i)$. Sei E ein Zerfällungskörper für A, sodass (E/K) eine endliche, galoissche Körpererweiterung ist. Dann hat $\hat{A} := E \otimes_K A$ die folgende Struktur

$$\hat{A} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{\dim_K K_i} \underbrace{E^{\hat{k}_i \times \hat{k}_i}}_{=:\hat{A}_{i,j}}$$

mit $\hat{k}_i := \frac{k_i \cdot \sqrt{\dim_{K_i} D_i}}{\dim_K K_i}$. *Wir können den Isomorphismus*

$$\Delta : \hat{A} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{\dim_K K_i} \hat{A}_{i,j} : \; a \mapsto (\Delta_{i,j}(a))_{i,j}$$

so wählen, dass für $a \in A \subset \hat{A}$ *gilt:* $\Delta_{i,j}(a) = \Delta_{i,1}(a)^{\sigma_j}$, *wo* $\sigma_1, \dots, \sigma_{\dim_K K_i}$ *ein Vertretersystem von* $\mathrm{Gal}(E/K)/\,\mathrm{Gal}(E/K_i)$ *durchläuft. Nun haben wir sowohl in* A *als auch in* $\hat{A}$ *eine Spurbilinearform* T_u *bzw.* $\hat{T}_u$ *im Sinne von von Definiton 2.4.13. Nun gilt*

$$\hat{T}_u|_{A\times A} = T_u$$

Diese Eigenschaft rechtfertigt gewissermaßen, wieso wir T_u *genau wie in 2.4.13 definiert haben, und dass wir den Hut über dem* T *getrost weglassen können. Selbiges gilt dann natürlich auch für beliebige (insbesondere auch unendlich-dimensionale) Körpererweiterungen* F *von* E.

(iii) *Sind* X *und* Y *volle Gitter in* A *mit* $X \subseteq Y$, *so folgt* $X^\sharp \supseteq Y^\sharp$. *Es gilt*

$$\frac{Y}{X} \cong_R \frac{X^\sharp}{Y^\sharp}$$

(iv) *Ist* X *ein volles* R*-Gitter in* A *mit* R*-Basis* $B = (B_1, \dots, B_{\dim_K A})$, *so ist*

$$B'_i := \sum_{j=1}^{\dim_K A} ({}_B(T_u)^B)^{-1}_{i,j} \cdot B_j$$

eine R*-Basis von* $X^\sharp$. *Wir können also* ${}_B(T_u)^{B^{-1}}$ *als die Matrix einer linearen Abbildung* $\varphi : \; A \longrightarrow A$ *auffassen, die* X *auf* $X^\sharp$ *abbildet (in diesem Sinne gilt dann* ${}_B\varphi_B = ({}_B(T_u)^B)^{-1}$*).*

(v) *Angenommen* X *ist ein selbstduales volles* R*-Gitter in* A *und* Y *ein* R*-Gitter, das* X *umfasst. Es folgt dann automatisch dass* $Y^\sharp \subseteq X \subseteq Y$. *Es gilt*

$$\mathrm{length}_R \frac{Y}{Y^\sharp} = \mathrm{length}_R \frac{\mathrm{discr}\, Y}{R} = \mathrm{length}_R \frac{R}{\mathrm{discr}\, Y^\sharp}$$

Ferner ist

$$\mathrm{length}_R \frac{Y}{X} = \mathrm{length}_R \frac{X}{Y^\sharp}$$

Wir können mithilfe der Diskriminate also ausrechnen, welchen Index ein Selbstduales Gitter in einem vorgegeben Gitter haben muss (sofern denn ein solches existiert).

Beweis. Nur für (ii),(iii) und (v) ist etwas zu zeigen, (i) folgt direkt aus der Definition, und (iv) haben wir bereits in (2.10) gesehen.

(ii) Das $E \otimes_K A$ die behauptete Struktur hat, und der Isomorphismus in die Wedderburn-Zerlegung wie behauptet gewählt werden kann, setzen wir als aus der Theorie halbeinfacher K-Algebren bekannt voraus. Zu zeigen bleibt also $\hat{T}_u|_{A \times A} = T_u$. Dazu zeigen wir für festes $i \in \{1, \dots, n\}$ dass $\operatorname{tr}_{K_i/K} \operatorname{tr.red.}_{A_i/K}(\varepsilon_i x) = \sum_{j=1}^{\dim_K K_i} \operatorname{tr.red.}_{\hat{A}_{i,j}/E}(\hat{\varepsilon}_{i,j} x)$, wo ε_i das zu A_i gehörige zentral-primitive Idempotent in A sei und $\hat{\varepsilon_{i,j}}$ die zu $\hat{A}_{i,j}$ gehörigen in $\hat{A}$. Sei also $x \in A$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\dim_K K_i} \operatorname{tr.red.}_{\hat{A}_{i,j}/E}(\hat{\varepsilon}_{i,j} x) &= \sum_{j=1}^{\dim_K K_i} \operatorname{tr}(\Delta_{i,j}(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{\dim_K K_i} \operatorname{tr}(\Delta_{i,1}(x))^{\sigma_j} \\
&= \operatorname{tr}_{K_i/K} \operatorname{tr}(\Delta_{i,1}(x)) \\
&= \operatorname{tr}_{K_i/K} \operatorname{tr.red.}_{A_i/K_i}(\varepsilon_i x)
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Definition von T_u und $\hat{T}_u$ folgt die Behauptung.

(iii) Dass $Y^\sharp \subseteq X^\sharp$ gilt, folgt direkt aus der Definition des dualen Gitters. Sei nun B eine R-Basis von X und C eine R-Basis von Y. Mit (iv) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{X^\sharp}{Y^\sharp} &\cong_R \frac{R^{1\times\dim_K A} \cdot ({}_B(T_u)^B)^{-1}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot ({}_C(T_u)^C)^{-1} \cdot {}_C\operatorname{id}_B} \\
&= \frac{R^{1\times\dim_K A} \cdot ({}_B(T_u)^B)^{-1}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot ({}_C\operatorname{id}_B \cdot {}_B(T_u)^B \cdot {}^B\operatorname{id}^C)^{-1} \cdot {}_C\operatorname{id}_B} \\
&= \frac{R^{1\times\dim_K A} \cdot ({}_B(T_u)^B)^{-1}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot {}^C\operatorname{id}^B \cdot ({}_B(T_u)^B)^{-1} \cdot {}_B\operatorname{id}_C \cdot {}_C\operatorname{id}_B} \\
&\cong_R \frac{R^{1\times\dim_K A}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot {}^C\operatorname{id}^B} \cong_R \dots
\end{aligned}$$

nun haben ${}^C\operatorname{id}^B$ und ${}_B\operatorname{id}_C = ({}^C\operatorname{id}^B)^\top$ dieselben Elementarteiler, also gilt

$$\dots \cong_R \frac{R^{1\times\dim_K A}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot {}_B\operatorname{id}_C} \cong_R \frac{Y}{X}$$

(v) Dass $Y^\sharp \subseteq X$ gilt, folgt aus (iii), denn aus $X \subseteq Y$ folgt $Y^\sharp \subseteq X^\sharp = X$. Sei B eine R-Basis von Y. Dann gilt mit (iv)

$$\frac{Y}{Y^\sharp} \cong_R \frac{R^{1\times\dim_K A}}{R^{1\times\dim_K A} \cdot {}_B(T_u)^{B^{-1}}}$$

was als R-Modul offensichtlich dieselbe Länge hat wie

$$\frac{R}{R \cdot \det({}_B(T_u)^{B^{-1}})} \cong \frac{R \cdot \det({}_B(T_u)^B)}{R} = \frac{\operatorname{discr} Y}{R}$$

Andererseits (wieder mit (iv)) gilt ${}_B(T_u)^{B^{-1}} = {}_{B'}(T_u)^{B'}$, wo B' die in (iv) definierte R-Basis von $Y^\sharp$ sei. Also gilt $\frac{R}{R\cdot\det({}_B(T_u)^{B^{-1}})} = \frac{R}{\operatorname{discr} Y^\sharp}$.

Die Aussage $\operatorname{length}_R \frac{Y}{X} = \operatorname{length}_R \frac{X}{Y^\sharp}$ folgt direkt mit (iii).

Bemerkung 2.4.15 (Anwendung auf Gruppenringe) *Sei G eine endliche Gruppe und $\chi_1, \dots, \chi_n$ ihre absolut irreduziblen Charaktere in Charakteristik 0, sowie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die zugehörigen zentral-primitiven Idempotente in $\overline{\mathbb{Q}}G$. Nach Definiton gilt*

$$\chi_i(-\cdot =) = T_{\varepsilon_i}(-, =)$$

und damit

$$\frac{1}{|G|} \cdot \chi_{\text{reg}}(-\cdot =) = T_u(-, =)$$

mit

$$u = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^{n} \chi_k(1_G) \cdot \varepsilon_k$$

Dieses u liegt in $\mathbb{Q}G$, denn die Koeffizienten der zentral-primitiven Idempotente zu Galois-konjugierten Charakteren sind gleich und liegen in $\mathbb{Q}$. Die Grammatrix von T_u bezüglich der Basis der Gruppenelemente (die eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Basis von $\mathbb{Z}_{(p)}G$ bilden) ist gerade eine Permutationsmatrix, nämlich

$$T_u(g, h) = \frac{1}{|G|}\chi_{\text{reg}}(gh) = \delta_{g,h^{-1}} \quad \forall g, h \in G$$

und liegt damit $\mathrm{GL}(|G|, \mathbb{Z}_{(p)})$, womit gezeigt ist dass $\mathbb{Z}_{(p)}G$ bezüglich T_u ein selbstduales Gitter in $\mathbb{Q}G$ ist.

Sei nun $R \supseteq \mathbb{Z}_{(p)}$ ein diskreter Bewertungsring, und entsprechend $K := \mathrm{Quo}(R)$ eine Körperweiterung von $\mathbb{Q}$, dann ist nach 2.4.14 RG ebenfalls ein selbstduales Gitter in KG, bezüglich demselben T_u. Seien nun $\hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_k$ ($k \le n$) die irreduziblen K-Charaktere von G und $m_1, \dots, m_k$ die zugehörigen Schur-Indizes. Dann gilt

$$T_u(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\chi}_i(1)}{m_i} \hat{\chi}_i(x \cdot y) \qquad \forall x, y \in KG$$

Damit können wir die Bilinearform T_u auf KG für Elemente x und y auch tatsächlich berechnen.

Lemma 2.4.16 *Seien die Voraussetzungen wie in Definition 2.4.13. Sei Λ eine* selbstduale *Ordnung in A, also $\Lambda^{\sharp,u} = \Lambda$. Sei nun A direkte Summe von zwei K-Algebren A_1 und A_2 und bezeichne mit ε_1 und ε_2 die zugehörigen zentralen Idempotente. Dann gilt*

$$\Lambda \cap \varepsilon_i\Lambda = (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$$

Damit folgt insbesondere $\operatorname{discr}_{\varepsilon_1 u} \varepsilon_1\Lambda = \operatorname{discr}_{\varepsilon_2 u} \varepsilon_2\Lambda$ *und* $\varepsilon_i\Lambda \supseteq (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$, $i \in \{1, 2\}$.

Beweis. Für alle $x \in \Lambda, y = \varepsilon_i y \in \varepsilon_i\Lambda \cap \Lambda$ gilt

$$T_{\varepsilon_i u}(\varepsilon_i x, y) = T_u(\varepsilon_i x, \varepsilon_i y) = T_u(x, \varepsilon_i^2 y) = T_u(x, y) \in R$$

also $y \in (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$ und damit $\Lambda \cap \varepsilon_i\Lambda \subseteq (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$.

Andersherum sei nun $y \in (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$. Dann ist für alle $x \in \Lambda$

$$T_u(x, y) = T_u(x, \varepsilon_i y) = T_u(\varepsilon_i x, \varepsilon_i y) = T_{\varepsilon_i u}(\varepsilon_i x, \varepsilon_i y) \in R$$

und damit folgt $\Lambda \cap \varepsilon_i\Lambda = (\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}$.

Damit gilt natürlich auch $(\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u} = \Lambda \cap \varepsilon_i\Lambda \subseteq \Lambda$, was die dritte Behauptung zeigt. Wir können also den Quotienten $\frac{\varepsilon_i\Lambda}{(\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}}$ betrachten, und den Noetherschen Ismorphiesatz anwenden:

$$\frac{\varepsilon_i\Lambda}{(\varepsilon_i\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_i u}} = \frac{\varepsilon_i\Lambda}{\Lambda \cap \varepsilon_i\Lambda} \cong \frac{\varepsilon_i\Lambda + \Lambda}{\Lambda} = \frac{\varepsilon_1\Lambda \oplus \varepsilon_2\Lambda}{\Lambda} \quad \text{als } R\text{-Moduln}$$

Man beachte dass die rechte Seite nicht mehr von i abhängt. Damit gilt nach 2.4.14

$$\operatorname{length}_R \frac{\operatorname{discr}_{\varepsilon_1 u} \varepsilon_1\Lambda}{R} = \operatorname{length}_R \frac{\varepsilon_1\Lambda}{(\varepsilon_1\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_1 u}} = \operatorname{length}_R \frac{\varepsilon_2\Lambda}{(\varepsilon_2\Lambda)^{\sharp,\varepsilon_2 u}} = \operatorname{length}_R \frac{\operatorname{discr}_{\varepsilon_2 u} \varepsilon_2\Lambda}{R}$$

und da R ein lokaler Hauptidealbereich ist folgt damit $\operatorname{discr}_{\varepsilon_1 u} \varepsilon_1\Lambda = \operatorname{discr}_{\varepsilon_2 u} \varepsilon_2\Lambda$. □

Satz 2.4.17 (Morita-Äquivalenz und Selbstdualität) *Sei R ein diskreter Bewertungsring, $K := \operatorname{Quo}(R)$, und Λ eine R-Ordnung mit $A := K \otimes_R \Lambda$ halbeinfach. Weiter sei $e \in \Lambda$ ein Idempotent und $u \in Z(A)$. Dann gilt: Ist Λ selbstdual bezüglich T_u, so ist $e\Lambda e$ selbstdual bezüglich T_{eu}. Insbesondere ist also auch die Basisordnung von Λ selbstdual (bei passend gewählter Spurbilinearform).*

Beweis. Es gilt für alle $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$:

$$T_{eu}(e\lambda e, eae) = T_u(e\lambda e, eae)$$

direkt aufgrund der Definition von T_u und T_{eu}. Weiter gilt

$$T_u(e\lambda e, eae) = T_u(\lambda, eae)$$

wegen $T_u(ab, c) = T_u(a, bc)$ und $T_u(ab, c) = T_u(b, ca)$. Folglich gilt also $eae \in (e\Lambda e)^{\sharp,eu}$ genau dann wenn $eae \in \Lambda^{\sharp,u}$. Wenn nun Λ bezüglich T_u selbstdual ist haben wir also $(e\Lambda e)^{\sharp,eu} = \Lambda^{\sharp,u} \cap eAe = \Lambda \cap eAe = e\Lambda e$. □

Lemma 2.4.18 *Sei R ein diskreter Bewerungsring mit Quotientenkörper K, A eine einfache, endlich-dimensionale K-Algebra. Dann gilt:*

(i) *Ist $a \in A$ so gewählt, dass die R-Algebra $R[a]$ als R-Modul endlich erzeugt ist, so liegt* $\operatorname{tr}_{Z(A)/K} \operatorname{tr.red.}_{A/Z(A)}(a)$ *in R.*

(ii) *Eine R-Teilalgebra $B \subseteq A$ (d. h. B Ring und $R \cdot 1_A \subseteq B$) mit $K \cdot B = A$ ist eine R-Ordnung (d. h. als R-Modul endlich erzeugt) genau dann, wenn für alle $b \in B$ der Ring $R[b]$ als R-Modul endlich erzeugt ist.*

Beweis.

(i) Da $R[a]$ endlich erzeugt als R-Modul ist, existiert ein normiertes Polynom $p(x) \in R[x]$ mit $p(a) = 0$. Wähle einen Zerfällungskörper E für A, sodass E von endlicher K-Dimension ist und galois'sch über K (und damit auch über $Z(A)$). Fixiere eine Einbettung $\iota : \ A \hookrightarrow E^{n\times n} \cong E \otimes_{Z(A)} A$ ($n = \sqrt{\dim_K A}$). Dann gilt $\mu_E(\iota(a)) \mid p(x)$, wo $\mu_E(\iota(a))$ das Minimalpolynom von $\iota(a)$ über E bezeichne. Also gilt $\operatorname{red.char.pol.}_{A/Z(A)}(a) = \operatorname{char.pol.}_E(\iota(a)) \mid \mu_E(\iota(a))^n \mid p(x)^n$. Damit teilt auch jedes Galoiskonjugierte von $\operatorname{red.char.pol.}_{A/Z(A)}(a)$ das Polynom $p(x)^n$. Also

$$\prod_{[\sigma]\in\operatorname{Gal}(E/K)/\operatorname{Gal}(E/Z(A))} \sigma(\operatorname{red.char.pol.}_{A/Z(A)}(a)) \mid p(x)^n \in R[x]$$

Die linke Seite liegt in $K[x]$, und damit als normiertes Polynom, dass ein normiertes Polynom in $R[x]$ teilt, bereits in $R[x]$. Offenbar ist der Koeffizient der zweithöchsten x-Potenz in der linken Seite gerade die Spur der zweithöchsten x-Potenz von $\operatorname{red.char.pol.}_{A/Z(A)}(a)$, welche gerade die reduzierte Spur von a über $Z(A)$ ist. Damit ist $\operatorname{tr}_{Z(A)/K} \operatorname{tr.red.}_{A/Z(A)}(a) \in R$ gezeigt.

(ii) Dass wenn B eine R-Ordnung ist, dann $R[b]$ als R-Modul endlich erzeugt ist für alle $b \in B$, ist klar, denn schließlich ist $R[b]$ ein R-Teilmodul von B. Also zur Umkehrung: Wähle $b_1, \dots, b_k \in B$, $k := \dim_K A$, so, dass $b_1, \dots, b_k$ eine K-Basis von A bildet. Nun betrachte das R-Gitter

$$L := \sum_{i=1}^{k} R \cdot b_i \subset A$$

Aus (i) folgt, dass $B \subseteq L^{\sharp,1_A}$, denn $T_{1_A}(x, y) = \operatorname{tr}_{Z(A)/K} \operatorname{tr.red.}_{A/Z(A)}(x \cdot y)$ nach Definition, und (i) sagt gerade, dass diese Spur für $x \cdot y \in B$ in R liegt. Nun ist $L^{\sharp,1_A}$ aber wieder ein R-Gitter in A, sprich endlich erzeugt als R-Modul, und damit ist B als R-Teilmodul von selbigem ebenfalls endlich erzeugt. □

Definition 2.4.19 (Maximalordnung) *Ist R ein diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quo}(R)$ und A eine endlich-dimensionale, halbeinfache K-Algebra, so nennen wir eine volle R-Ordnung Λ in A, die in keiner anderen R-Ordnung in A echt enthalten ist eine* Maximalordnung. *In jeder endlich-dimensionalen halbeinfachen K-Algebra existiert eine Maximalordnung, und jede volle R-Ordnung in A ist in mindestens einer Maximalordnung enthalen.*

Beweis. Seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ die zentral-primitiven Idempotente in A. Dann ist mit jeder R-Ordnung Λ in A auch $\bigoplus_{i=1}^k \varepsilon_i \Lambda$ eine R-Ordnung in A. Die Maximalordnungen (so sie denn existieren, was wir noch zeigen müssen), sind also direkte Summen von Maximalordnungen in den Wedderburnkomponenten. Wir nehmen also o.B.d.A. an, dass A einfach ist.

Wir wenden das Lemma von Zorn auf die Menge der vollen R-Ordnungen in A (geordnet durch Inklusion) an. Sei dazu

$$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \ldots$$

eine Kette von vollen R-Ordnungen in A. Wir behaupten: Dann ist $\Lambda_\infty := \bigcup_{i=1}^\infty \Lambda_i$ wieder eine R-Ordnung. Denn jedes Element $a \in \Lambda_\infty$ liegt in einem der Λ_i, mit Lemma 2.4.18 (i) ist also $R[a]$ endlich erzeugt als R-Modul. Da Λ_∞ sicher eine R-Algebra ist, folgt daraus mit Lemma 2.4.18 (ii), dass Λ_∞ eine volle R-Ordnung in A ist, und damit eine obere Schranke für die Kette $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen bleibt, dass mindestens eine volle R-Ordnung in A existiert. Sei dazu $\Delta: \ A \longrightarrow K^{\dim_K A \times \dim_K A}$ die reguläre Darstellung von A. Dann ist z. B. $\Delta^{-1}(\Delta(A) \cap R^{\dim_K A \times \dim_K A})$ eine solche. $\square$

Bemerkung 2.4.20 *Voraussetzungen wie in der vorangehenden Definition. Die Eigenschaft einer Ordnung, Maximalordnung zu sein, ist unabhängig von der Einbettung in A, also eine Eigenschaft von Λ als R-Algebra. Genauer: Λ ist Maximalordnung in A genau dann, wenn Λ eine volle R-Ordnung in A ist und eine Maximalordnung in $K \otimes_R \Lambda$.*

Beweis. Eine Einbettung $\Lambda \hookrightarrow A$ lässt sich K-linear fortsetzen zu einem Ismomorphismus $K \otimes_R \Lambda \xrightarrow{\sim} A$. Unter diesem Isomorphismus stehen nun die R-Ordnungen in A die Λ umfassen und die in $K \otimes_R \Lambda$, die Λ umfassen, in Bijektion. $\square$

Lemma 2.4.21 (Maximalordnungen für R vollständig) *Sei R ein* vollständiger *diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, $K := \mathrm{Quo}(R)$.*

(i) Ist D ein Schiefkörper von endlicher Dimension über K, so hat D eine eindeutig bestimmte R-Maximalordnung Θ. $\mathfrak{P} := \mathrm{Jac}(\Theta)$ ist eindeutiges maximales Rechts- und Linksideal ist Θ, d. h. Θ ist lokal.

(ii) Die gebrochenen Θ-Rechts- und Linksideale in D (will heißen: die endlich erzeugten Θ-Teilmoduln von ${}_\Theta D$ und D_Θ) sind gegeben durch

$$\mathfrak{P}^z \quad \textit{für } z \in \mathbb{Z}, \textit{ wobei } \mathfrak{P}^{-1} := \{x \in D \mid x \cdot \mathfrak{P} \subseteq \Theta\}$$

Insbesondere gilt für jedes Element $\Pi \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}^2$, dass $\mathfrak{P} = \Pi \cdot \Theta = \Theta \cdot \Pi$.

(iii) Ist $A = D^{n\times n}$ ein Matrixring (D wie in (i)), so ist jede Maximalordnung in A konjugiert (in $\mathrm{GL}(n, D)$) zu $\Theta^{n\times n}$.

Beweis. (i) findet sich in [Rei75], Kapitel 3, Theorem (12.8), (ii) in [Rei75], Kapitel 3, Theorem (13.2), und (iii) Kapitel 5, Theorem (17.3). $\square$

Lemma 2.4.22 *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, $K = \mathrm{Quo}(R)$, D ein Schiefkörper endlicher Dimension über R und Θ die R-Maximalordnung in D. $\mathfrak{P}$ sei das maximale Ideal von Θ. Weiterhin sei $\Lambda \subseteq A = D^{n\times n}$ eine volle R-Ordnung und $V := D^{1\times n}$ (aufgefasst als D-A-Bimodul). Dann gilt:*

(i) Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$ sodass für zwei beliebige Θ-Λ-Bigitter L_1, L_2 in V ein $\beta \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$\mathfrak{P}^\alpha \cdot L_1 \subseteq \mathfrak{P}^\beta \cdot L_2 \subseteq L_1 \tag{2.11}$$

(ii) Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$ sodass für zwei beliebige Λ-Gitter L_1, L_2 in V ein $\beta \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$L_1 \cdot \mathfrak{p}^\alpha \subseteq L_2 \cdot \mathfrak{p}^\beta \subseteq L_1 \tag{2.12}$$

Beweis. o.B.d.A. sei Λ in $\Theta^{n\times n}$ enthalten (was nach Lemma 2.4.21 durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}(n, D)$ erreicht werden kann). Die $\Theta^{n\times n}$-Gitter in $D^{1\times n}$ sind gerade gegeben durch $\mathfrak{P}^z \cdot \Theta^{1\times n}$ (was daraus folgt, dass $\Theta^{n\times n}$ Morita-äquivalent zu Θ ist, also die Θ-Gitter in D in Bijektion zu den $\Theta^{n\times n}$-Gittern in $D^{1\times n}$ stehen).

(i) Da Λ ein *volles* R-Gitter in $D^{n\times n}$ ist, existiert ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $(\mathfrak{P}^\gamma)^{n\times n} \subset \Lambda$. Wir zeigen (2.11) ersteinmal für $\alpha = \gamma$, $L_1 = \Theta^{1\times n}$ und L_2 beliebig. $L_2 \cdot \Theta^{n\times n}$ ist dann ein $\Theta^{n\times n}$-Gitter in $\Theta^{1\times n}$, also von der Form $\mathfrak{P}^l \cdot \Theta^{1\times n}$. Weiter gilt dann also $L_2 \supseteq L_2 \cdot (\mathfrak{P}^\gamma)^{n\times n} = L_2 \cdot \Theta^{n\times n} \cdot \mathfrak{P}^\gamma = \mathfrak{P}^l \cdot \Theta^{1\times n} \cdot \mathfrak{P}^\gamma = \mathfrak{P}^{l+\gamma} \cdot \Theta^{1\times n}$. Zusammen also

$$\mathfrak{P}^{l+\gamma} \cdot \Theta^{1\times n} \subseteq L_2 \subseteq \mathfrak{P}^l \cdot \Theta^{1\times n}$$

Seien nun auch L_1 beliebig. Dann haben wir also auch ein $l' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathfrak{P}^{l'+\gamma} \cdot \Theta^{1\times n} \subseteq L_1 \subseteq \mathfrak{P}^{l'} \cdot \Theta^{1\times n}$$

Nun gilt

$$\mathfrak{P}^{l+2\gamma} \cdot L_1 \subseteq \mathfrak{P}^{l+l'+2\gamma} \cdot \Theta^{1\times n} \subseteq \mathfrak{P}^{l'+\gamma} \cdot L_2 \subseteq \mathfrak{P}^{l+l'+\gamma} \cdot \Theta^{1\times n} \subseteq \mathfrak{P}^l \cdot L_1$$

womit (2.11) erfüllt ist, wenn man $\alpha := 2\gamma$ und $\beta = l' - l + \gamma$ wählt.

(ii) Wie in (i) existiert ein $\gamma \in \mathbb{N}$ sodass $\mathfrak{p}^\gamma \cdot \Theta^{n\times n} \subseteq \Lambda$, womit für ein Λ-Gitter L in $D^{1\times n}$ folgt, dass

$$L \cdot \Theta^{n\times n} \cdot \mathfrak{p}^\gamma \subseteq L \subseteq L \cdot \Theta^{n\times n}$$

Wieder ist $L \cdot \Theta^{n\times n}$ von der Form $\mathfrak{P}^l \cdot \Theta^{1\times n}$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Da ein $e \geq 1$ existiert mit $\mathfrak{P}^e = \mathfrak{p} \cdot \Theta$ (denn $\mathfrak{p} \cdot \Theta$ ist ein zweiseitiges Ideal in Θ, muss also eine Potenz von $\mathfrak{P}$ sein), gilt

$$\Theta^{1\times n} \cdot \mathfrak{p}^{\lceil \frac{l}{e} \rceil + \gamma} \subseteq L \subseteq \Theta^{1\times n} \cdot \mathfrak{p}^{\lfloor \frac{l}{e} \rfloor}$$

und damit

$$\Theta^{1\times n} \cdot \mathfrak{p}^{\gamma+1} \subseteq L \cdot \mathfrak{p}^{-\lfloor \frac{l}{e} \rfloor} \subseteq \Theta^{1\times n}$$

Von hier aus können wir offensichtlich wie in (i) verfahren (wobei wir $\alpha = 2 \cdot (\gamma + 1)$ bekommen werden). □

Folgerung 2.4.23 *Seien die Voraussetzungen wie im vorangehenden Lemma und zusätzlich $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ endlich. Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen*

$$\big\{\{L\cdot\mathfrak{p}^z \mid z\in\mathbb{Z}\} \;\big|\; L \text{ ist } \Lambda\text{-Gitter in } D^{1\times n}\big\}$$

endlich. Da ein Λ-Gitter L zu $L\cdot\mathfrak{p}$ isomorph ist (Isomorphismus induziert durch Multiplikation mit π, wo π ein Erzeuger von $\mathfrak{p}$ sei), folgt damit insbesondere, dass nur endlich viele Isomorphieklassen von Λ-Gittern in $D^{1\times n}$ existieren.

Beweis. Sei α wie in Lemma 2.4.22 (ii). Weiter sei L ein fest gewähltes Λ-Gitter in $D^{1\times n}$. Nach Definition von α existiert nun für jedes Λ-Gitter $L'\subseteq D^{1\times n}$ ein $\beta\in\mathbb{Z}$ mit $L\cdot\mathfrak{p}^\alpha\subseteq L'\cdot\mathfrak{p}^\beta\subseteq L$. Damit gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen von Λ-Gittern wie Λ-Teilmoduln von $\frac{L}{L\cdot\mathfrak{p}^\alpha}$, und da $\frac{L}{L\cdot\mathfrak{p}^\alpha}$ aufgrund der Voraussetzung, dass $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ endlich sein soll, als Menge endlich ist, sind das nur endlich viele. □

Satz 2.4.24 (Jordan-Zassenhaus) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$, $K := \mathrm{Quo}(R)$ und Λ eine R-Ordnung. Ferner sei $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ endlich und $A := K\otimes_R\Lambda$ halbeinfach. Dann gilt: In jedem endlich erzeugten A-Modul V gibt es nur endlich viele Isomorphietypen voller Λ-Gitter.*

Beweis. Sei $V = V_1\oplus\ldots\oplus V_n$ eine Zerlegung von V als direkte Summe einfacher A-Moduln. Wir machen eine Induktion über n. Für den Fall $n=1$ folgt die Behauptung aus Folgerung 2.4.23.

Angenommen die Behauptung ist für alle A-Moduln V' mit $\le n-1$ einfachen direkten Summanden gezeigt. Sei L ein volles Λ-Gitter in V, und bezeichne mit $\pi: V\twoheadrightarrow V_1$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0\longrightarrow L\cap\mathrm{Kern}(\pi)\longrightarrow L\longrightarrow\pi(L)\longrightarrow 0$$

$L\cap\mathrm{Kern}(\pi)$ ist ein volles Λ-Gitter in $V_2\oplus\ldots\oplus V_n$. $\pi(L)$ ist ein volles Λ-Gitter in V_1. Also ist jedes volle Λ-Gitter in V eine Erweiterung von einem vollen Λ-Gitter in V_1 mit einem ebensolchen in $V_2\oplus\ldots\oplus V_n$, und davon gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils bis auf Isomorphie nur endlich viele.

Es reicht also zu zeigen, dass es für zwei Λ-Gitter L_1 und L_2 nur endlich viele Erweiterungen gibt. Es gilt

$$K\otimes_R\mathrm{Ext}^1_\Lambda(L_1,L_2)\overset{(*)}{\cong}_K\mathrm{Ext}^1_{K\otimes_R\Lambda}(K\otimes_R L_1,K\otimes_R L_2)\overset{(**)}{=}\{0\}$$

wobei $(**)$ daraus folgt, dass $K\otimes_R\Lambda$ halbeinfach ist, und daher jeder e. e. Modul darüber projektiv. $(*)$ ist auch eine bekannte Tatsache, siehe z. B. [Rei75] Corollary (2.43). Folglich ist also $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(L_1,L_2)$ ein (endlich erzeugter) R-Torsionsmodul, woraus wegen der Endlichkeit von $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ folgt, dass $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N)$ als Menge endlich ist. Insbesondere existieren also nur endlich viele Erweiterungen von L_1 und L_2. □

2.5 Graduierte Ordnungen & Hüllen

Im Folgenden werden wir graduierte Ordnungen einführen. Die Theorie richtet sich nach [Ple83] (bis zur Definition einer graduierten Hülle, und Folgerung 2.5.3 ausgenommen). Wir interessieren uns insbesondere für die irreduziblen Γ-Gitter mit einfachem Radikalquotienten (wo Γ eine graduierte Ordnung sei), und deren Zusammenhang mit den irreduziblen Λ-Gittern mit einfachem Radikalquotien (wo Λ eine volle Teilordnung von Γ sei), denn die irreduziblen Λ-Gitter mit einfachem Radikalquotienten werden bei der Konstruktion der projektiv-unzerlegbaren Λ-Gitter wichtig sein.

Satz 2.5.1 (Kompatible Basen, [Ple83]) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $K = \mathrm{Quo}(R)$, D ein Schiefkörper von endlicher K-Dimension und Θ die R-Maximalordnung in D mit maximalem Ideal $\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{L}$ ein Teilverband des Verbands aller vollen Θ-*Links*gitter in $D^{1\times n}$ der die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

(L1) Ist $L \in \mathfrak{L}$, so ist auch $\mathfrak{P}^k \cdot L \in \mathfrak{L}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(L2) Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$, sodass für beliebige $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$ Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\mathfrak{P}^{l+\alpha} \cdot L_1 \subseteq \mathfrak{P}^k \cdot L_2 \subseteq \mathfrak{P}^l \cdot L_1$$

Dann gilt: Es gibt genau dann *eine D-Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $D^{1\times n}$ sodass jedes Gitter $L \in \mathfrak{L}$ von der Form*

$$L = \mathfrak{P}^{k_1} \cdot b_1 + \cdots + \mathfrak{P}^{k_n} \cdot b_n \tag{2.13}$$

für passend gewählte $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ist, wenn *$\mathfrak{L}$ die folgende Distributivitätsbedingung erfüllt:*

$$(L_1 \cap L_2) + L_3 = (L_1 + L_3) \cap (L_2 + L_3) \quad \forall L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{L} \tag{2.14}$$

Wir nennen eine Basis von $D^{1\times n}$, bezüglich der jedes $L \in \mathfrak{L}$ von der Form (2.13) ist, kompatibel.

Bemerkung 2.5.2 *Bevor wir den Satz beweisen, schauen wir uns zuerst einmal an, welche Verbände $\mathfrak{L}$, die für uns relevant sind, die Bedingungen des Satzes überhaupt erfüllen. R sei ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$.*

(i) Ist Λ eine volle R-Ordnung in $D^{n\times n}$, so erfüllt der Verband der Θ-Λ-Bigitter in $D^{1\times n}$ die Bedingungen (L1) und (L2) des letzten Satzes.

(ii) Ist Λ eine R-Ordnung in $D^{n\times n}$, so erfüllt der Verband der Λ-Gitter in $D^{1\times n}$ die Bedingungen (L1) und (L2) des letzten Satzes (wobei wir $\Theta = R$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ wählen).

Beides folgt direkt aus Lemma 2.4.22.

Beweis von Satz 2.5.1. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Wir machen zuerst folge Feststellung: Ist $L \in \mathfrak{L}$ und sind $L_1, \ldots, L_k$ $\mathfrak{L}$-maximale Teilgitter von L, so folgt

$$\frac{L}{\bigcap_{i=1}^{k} L_i} \overset{\text{als } \Theta\text{-Linksmoduln}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{k} \frac{L}{L_i} \tag{2.15}$$

Um das zu zeigen, zeigen wir dass wir aufgrund der Distributivitätsbedingung in folgender Situation sind:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & L \arrow[dllll, no head] \arrow[dll, no head] \arrow[d, no head] \arrow[drrr, no head] & & & \\
L_1 \arrow[dr, no head] & & L_2 \arrow[dl, no head] & & L_3 \arrow[ddl, no head] & & \cdots & L_k \arrow[dddl, no head] \\
 & L_1 \cap L_2 \arrow[drr, no head] & & & & & & \\
 & & & L_1 \cap L_2 \cap L_3 \arrow[drrr, dotted, no head] & & & & \\
 & & & & & & L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k &
\end{tikzcd}$$

d. h. $L_1 \cap L_2 \supsetneqq L_1 \cap L_2 \cap L_3 \supsetneqq \ldots \supsetneqq L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_k$. Denn würde für ein n_0 gelten

$$\bigcap_{i=1}^{n_0} L_i = \bigcap_{i=1}^{n_0+1} L_i \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n_0} L_i \subseteq L_{n_0+1}$$

so hätten wir folgenden Widerspruch:

$$L_{n_0+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{n_0} L_i \right) + L_{n_0+1} \overset{(2.14)}{=} \bigcap_{i=1}^{n_0} \underbrace{(L_i + L_{n_0+1})}_{\text{wg. } \mathfrak{L}\text{-Maximalität } = L} = \bigcap_{i=1}^{n_0} L = L$$

Um nun (2.15) zu zeigen müssen wir nur noch induktiv den chinesischen Restsatz anwenden: Angenommen wir haben für ein k_0 gezeigt dass

$$\frac{L}{\bigcap_{i=1}^{k_0} L_i} \cong \bigoplus_{i=0}^{k_0} \frac{L}{L_i}$$

so folgt aus $L_{k_0+1} + \bigcap_{i=1}^{k_0} L_i = L$ dass

$$\frac{L}{\bigcap_{i=1}^{k_0+1} L_i} \overset{\text{C.R.S.}}{\cong} \frac{L}{\bigcap_{i=1}^{k_0} L_i} \oplus \frac{L}{L_{k_0+1}} \overset{\text{I. V.}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{k_0+1} \frac{L}{L_i}$$

Da der Induktionsanfang $k_0 = 1$ trivial ist, ist damit (2.15) gezeigt.

Man beachte dass die rechte Seite von (2.15) sich als Θ-Linksmodul nicht mit weniger als k Elementen erzeugen lässt (denn sie hat $\left(\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}\right)^{1\times k}$ als epimorphes Bild, und das ist ein $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Linksvektorraum von Dimension k), die linke Seite aber von n Elementen erzeugt werden kann, da $L \leq \Theta^{1\times n}$. Also hat jedes Gitter in $\mathfrak{L}$ nur endlich viele $\mathfrak{L}$-maximale Teilgitter (höchstens n Stück).

2. Nun definieren wir zu einem Gitter $L \in \mathfrak{L}$ zwei Mengen, zum einen

$$\mathfrak{R}(L) := \{L' \in \mathfrak{L} \mid L' \subseteq L \text{ und } L' \nsubseteq \mathfrak{P}\cdot L\}$$

und zum anderen

$$\mathfrak{R}_1(L) := \{L' \in \mathfrak{R}(L) \mid \text{ es existiert ein eindeutiges } \mathfrak{L}\text{-maximales Teilgitter } L'' \subseteq L'\}$$

$\mathfrak{R}(L)$ ist eine endliche Menge, denn jedes Gitter in $\mathfrak{R}(L)$ umfasst nach Bedingung (L2) $\mathfrak{P}^\alpha \cdot L$, und $\frac{L}{\mathfrak{P}^\alpha\cdot L}$ ist ein Θ-Linksmodul der Länge $\alpha\cdot n$, d. h. jede echt absteigende Kette von Gittern in $\mathfrak{R}(L)$ hat Länge $\leq n\cdot\alpha$. Gleichzeitig hat wie wir eben gesehen haben jedes Gitter in $\mathfrak{R}(L)$ nur endlich viele $\mathfrak{L}$-maximale Teilgitter, zusammen folgt also die Endlichkeit von $\mathfrak{R}(L)$.

3. Wähle nun ein beliebiges Gitter $L \in \mathfrak{L}$ aus, und verfeinere die Kette $\mathfrak{P}\cdot L \subsetneqq L$ zu einer Kette $\mathfrak{P}\cdot L = L_{t+1} \subsetneqq L_t \subsetneqq L_{t-1} \subsetneqq \ldots L_2 \subsetneqq L_1 = L$, sodass jedes L_i $\mathfrak{L}$-maximal ist in L_{i-1} ist (wir könnten soetwas eine $\mathfrak{L}$-Kompositionsreihe nennen). Definiere nun Mengen

$$\mathcal{V}(L_i) := \{L' \in \mathfrak{R}(L) \mid L' \subseteq L_i \text{ und } L' \nsubseteq L_{i+1} \subset L_i\}, \quad i \in \{1,\ldots,t\}$$

Die Behauptung ist nun folgende: $\mathcal{V}(L_i)$ hat ein eindeutiges minimales Element und dieses liegt in $\mathfrak{R}_1(L)$. Andersherum ist jedes Element aus $\mathfrak{R}_1(L)$ minimales Element eines der $\mathcal{V}(L_i)$. Folglich hat $\mathfrak{R}_1(L)$ genau t Elemente, denn die $\mathcal{V}(L_i)$ sind offenbar disjunkt (direkt nach Definition).

Seien dazu $L', L'' \in \mathcal{V}(L_i)$ für ein $i \in \{1,\ldots,t\}$. Dann liegt auch $L'\cap L''$ in $\mathcal{V}(L_i)$, denn offensichlich liegt mit L' und L'' auch $L'\cap L''$ unterhalb von L_i, und läge $L'\cap L''$ unterhalb von L_{i+1}, so würde folgen

$$L_{i+1} = L''\cap L' + L_{i+1} \overset{(2.14)}{=} (L' + L_{i+1}) \cap (L'' + L_{i+1}) = L_i \cap L_i = L_i \qquad (2.16)$$

wobei $L' + L_{i+1} = L_i$ folgt, da L_{i+1} $\mathfrak{L}$-maximal in L_i ist und $L' \nsubseteq L_{i+1}$ (dasselbe für L''). (2.16) sagt aber aus, dass $L_i = L_{i+1}$ ist, im Widerspruch zu Definition der L_i. Damit ist jedes $\mathcal{V}(L_i)$ unter endlichen Schnitten abgeschlossen, als Teilmenge von $\mathfrak{R}(L)$ sicher endlich, und damit ist

$$P_i := \bigcap_{L'\in\mathcal{V}(L_i)} L'$$

eindeutiges minimales Element in $\mathcal{V}(L_i)$.

Nun liegt also jedes $L' \in \mathfrak{L}$ mit $L \subsetneqq P_i$ sicher unterhalb von L_{i+1} (bzw. $L' = L_{i+1}$, was wir wenn wir von "unterhalb" sprechen stets einschließen wollen), und somit ist $P_i \cap L_{i+1}$ endeutiges $\mathfrak{L}$-maximales Teilgitter von P_i (für alle Teilgitter L' von P_i, die in $\mathfrak{R}(L)$ liegen, ist das unmittelbar klar, alle Teilgitter von P_i, die nicht in $\mathfrak{R}(L)$ liegen, liegen aber unterhalb von $\mathfrak{P} \cdot L$, was in L_{i+1} enthalten ist). Also $\{P_1, \ldots, P_t\} \subseteq \mathfrak{R}_1(L)$.

Sei nun $P \in \mathfrak{R}_1(L)$. Klarerweise existiert ein i sodass $P \in \mathcal{V}(L_i)$. Damit gilt $P = P_i$, denn P_i ist eindeutiges inklusionsminimales Element in $\mathcal{V}(L_i)$, also $P_i \subseteq P$. P hat hat andererseits das Teilgitter $P \cap L_{i+1}$. Nach der Distributivitätsbedingung gilt also

$$(P \cap L_{i+1}) + P_i = (P + P_i) \cap (L_{i+1} + P_i) = P \cap L_i = P$$

P hat ein eindeutiges maximales $\mathfrak{L}$-Teilgitter, wenn also P Summe zweier seiner Teilgitter ist, so muss einer der Summanden bereits gleich P sein. $P \cap L_{i+1}$ liegt sicher echt unterhalb von P, also muss $P_i = P$ sein. Somit gilt also $\mathfrak{R}_1 = \{P_1, \ldots, P_t\}$.

4. Nun behaupten wir: Urbilder in P_i einer $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Basis von $\frac{P_i}{P_i \cap L_{i+1}}$ bilden zusammen (für $i = 1, \ldots, t$) eine eine Θ-Basis von L.

   Wir haben nach Noetherschem Isomorphiesatz einen Isomorphismus von $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Linksvektorräumen

$$\frac{P_i}{P_i \cap L_{i+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{P_i + L_{i+1}}{L_{i+1}} = \frac{L_i}{L_{i+1}} : \ p + L_{i+1} \cap P_i \mapsto p + L_{i+1} \qquad (2.17)$$

   Folglich ist eine $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Basis von $\frac{P_i}{P_i \cap L_{i+1}}$ (zurückgezogen nach P_i, und dann modulo L_{i+1} genommen) ebenso eine eine $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Basis von $\frac{L_i}{L_{i+1}}$. Es ist aber

$$\{0\} = \frac{L_{t+1}}{\mathfrak{P} \cdot L} \subseteq \frac{L_t}{\mathfrak{P} \cdot L} \subseteq \frac{L_{t-1}}{\mathfrak{P} \cdot L} \subseteq \ldots \subseteq \frac{L_2}{\mathfrak{P} \cdot L} \subseteq \frac{L_1}{\mathfrak{P} \cdot L} = \frac{L}{\mathfrak{P} \cdot L}$$

   eine aufsteigende Filtrierung des $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Linksvektorraums $\frac{L}{\mathfrak{P} \cdot L}$. Urbilder von Basen der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Filtrierung bilden also zusammen eine $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Basis von $\frac{L}{\mathfrak{P} \cdot L}$. Urbilder dieser Basiselemente unter dem natürlichen Epimorphismus $L \longrightarrow \frac{L}{\mathfrak{P} \cdot L}$ bilden also eine Θ-Basis von L (nach Nakayama Lemma 2.2.3, denn daraus folgt, dass $\frac{\Theta}{\mathrm{Jac}(\Theta)}$-Erzeuger von $\frac{M}{\mathrm{Jac}(\Theta) \cdot M} = \frac{M}{\mathfrak{P} \cdot M}$ für einen Θ-Linksmodul M automatisch auch Θ-Erzeuger für M sind).

5. Nehmen wir uns also Elemente $B^{(i)} := (b_1^{(i)}, \ldots, b_{n_i}^{(i)})$ aus den P_i her, deren Bilder in $\frac{P_i}{P_i \cap L_{i+1}}$ eine Basis bilden, so ist

$$L = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{n_i} \mathfrak{P}^0 \cdot b_k^{(i)}$$

Schauen wir nun nach, wie wir in Schritt 3 L festgelegt haben, so stellen wir fest, dass die Wahl von L beliebig war. Nehmen wir uns also *irgendein* anderes Gitter $L' \in \mathfrak{L}$ heraus, so ist haben wir mit derselben Argumentation wie in 3. genau t Elemente in $\mathfrak{R}_1(L')$, und da Gitter mit eindeutigem $\mathfrak{L}$-maximalem Teilgitter charakteristisch sind gilt

$$\mathfrak{R}_1(L') = \{\mathfrak{P}^{\eta_1} \cdot P_1, \ldots, \mathfrak{P}^{\eta_t} \cdot P_t\},$$

für passend gewählte $\eta_1, \ldots, \eta_t \in \mathbb{Z}$ (die nach Bedingung (L2) an $\mathfrak{L}$ existieren). Folglich gilt mit der selben Argumentation wie in Schritt 4 auch

$$L' = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{n_i} \mathfrak{P}^{\eta_i} \cdot b_k^{(i)}$$

Die Vereinigung der $B^{(i)}$ ist also eine kompatible Basis. □

Lemma 2.5.3 *Seien $R, D, \Theta, \mathfrak{P}, n$ wie in Satz 2.5.1, und sei jetzt $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ endlich. $\mathfrak{L}$ sei ein Teilverband aller vollen R-Gitter in $D^{1\times n}$, der (L1) und (L2) erfülle (wobei Θ in der Bedingung zu diesem Zwecke durch R und $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{p}$ ersetzt werden muss). Weiter sei $\emptyset \neq \mathfrak{L}^* \subseteq \mathfrak{L}$ ein Teilverband aus Θ-Linksgittern, sodass (L1) und (L2) erfüllt sind (diesmal in unveränderter Form) und zudem die Distributivitätsbedingung (2.14). Nun seien noch $L = L_1, L_2, \ldots, L_t \in \mathfrak{L}^*$ ($t \in \mathbb{N}$) gegeben, sodass*

$$\mathfrak{P} \cdot L = L_{t+1} \subsetneqq L_t \subsetneqq L_{t-1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq L_2 \subsetneqq L_1 = L$$

und L_{i+1} $\mathfrak{L}^*$-maximal in L_i für alle $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Dann ist die Menge

$$\mathfrak{R}(L) := \{L' \in \mathfrak{L} \mid L' \subseteq L \text{ und } L' \nsubseteq \mathfrak{p} \cdot L\}$$

wieder endlich. Die Menge

$$\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*) := \left\{ \{\mathfrak{P}^z \cdot L' \mid z \in \mathbb{Z}\} \;\middle|\; \begin{array}{c} L' \in \mathfrak{L}^* \\ L' \text{ hat ein eindeutiges } \mathfrak{L}^*\text{-maximales Teilgitter} \end{array} \right\}$$

enthält dann genau t Elemente. Die analog definierte Menge $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L})$ ist ebenfalls endlich und hat $\geq t$ Elemente. Für jedes $[Q] := \{\mathfrak{P}^z \cdot Q \mid z \in \mathbb{Z}\} \in \mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$ ist die Menge

$$\mathrm{Sub}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{L}^*}([Q]) := \left\{ \{\mathfrak{p}^z \cdot M \mid z \in \mathbb{Z}\} \;\middle|\; \begin{array}{c} M \in \mathfrak{L} \text{ und ist } L' \in \mathfrak{L}^* \text{ mit } M \subseteq L' \\ \text{so folgt: } \exists\ z \in \mathbb{Z} \text{ mit } M \subseteq \mathfrak{P}^z \cdot Q \subseteq L' \end{array} \right\} \cap \mathrm{SRQ}(\mathfrak{L})$$

nichtleer. Auf die Interpretationen der Mengen gehen wir später ein, wenn wir graduierte Ordnungen eingeführt haben.

Beweis. Der Satz folgt aus dem Beweis von Satz 2.5.1, wenn wir ihn noch einmal genau lesen. Das die Menge $\mathfrak{R}(L)$ stets endlich ist folgt daraus, dass für jedes Gitter $L' \in \mathfrak{L}$ nach (L2) ein $z \in \mathbb{Z}$ existiert mit $\mathfrak{p}^\alpha \cdot L \subseteq \mathfrak{p}^z \cdot L' \subseteq L$. Wählen wir z minimal mit dieser Eigenschaft, so liegt $\mathfrak{p}^z \cdot L' \in \mathfrak{R}(L)$. Im Umkehrschluss liegt also jedes Element aus $\mathfrak{R}(L)$ überhalb von $\mathfrak{p}^\alpha \cdot L$. Folglich haben wir maximal so viele Elemente in $\mathfrak{R}(L)$ wie $\frac{L}{\mathfrak{p}^\alpha \cdot L}$ Teilmengen hat, und da wir die Endlichkeit von $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ hier voraussetzen sind das nur endlich viele.

Definieren wir nun Mengen $\mathcal{V}(L_i) := \{L' \in \mathfrak{R}(L) \mid L' \subseteq L_i \text{ und } L' \nsubseteq L_{i+1}\}$ und $\mathcal{V}^*(L_i) := \mathcal{V}(L_i) \cap \mathfrak{L}^*$. Wir hatten im Beweis zu 2.5.1 im 3. Schritt gesehen, dass $P_i := \bigcap \mathcal{V}^*(L_i)$ gerade Vertreter der Elemente aus $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$ sind. Folglich ist klar, dass $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$ genau t Elemente enthält. Nun ist $P_i \in \mathcal{V}^*(L_i) \subseteq \mathcal{V}(L_i)$. Wir finden wegen der Endlichkeit der $\mathcal{V}(L_i)$ also sicher ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) Gitter $Q_i \in \mathcal{V}(L_i)$ mit $Q_i \subseteq P_i$ welches inklusionsminimal in $\mathcal{V}(L_i)$ ist. Wir behaupten $\{\mathfrak{p}^z \cdot Q_i \mid z \in \mathbb{Z}\} \in \mathrm{SRQ}(\mathfrak{L})$. Denn ist $L' \in \mathfrak{L}$ und $L' \subsetneqq Q_i$, so kann nach Definition von Q_i nicht $L' \in \mathcal{V}(L_i)$ gelten, also $L' \subseteq L_{i+1}$ und damit $L' \subseteq Q_i \cap L_{i+1}$. Q_i hat also ein eindeutiges $\mathfrak{L}$-maximales Teilgitter, liegt also in $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L})$. Damit ist klar dass $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L})$ mindestens so viele Elemente hat wie $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$. Ferner liegt $\{\mathfrak{p}^z \cdot Q_i \mid z \in \mathbb{Z}\}$ in $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{L}/\mathfrak{L}^*}(\{\mathfrak{P}^z \cdot P_i \mid z \in \mathbb{Z}\})$, denn ist $L' \in \mathfrak{L}^*$ mit $Q_i \subseteq L'$, so folgt $Q_i \subseteq L' \cap P_i \subseteq P_i$. Also liegt $L' \cap P_i$ in $\mathcal{V}^*(L_i)$, und da P_i minimal in dieser Menge war haben wir $P_i \subseteq P_i \cap L'$, woraus $P_i \subseteq L'$ folgt. □

Definition 2.5.4 (Graduierte Ordnung) *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $K = \mathrm{Quo}(R)$, und Γ eine R-Ordnung, für die $A := K \otimes_R \Gamma$ halbeinfach ist. Wir nennen Γ eine* graduierte Ordnung, *wenn ein Satz orthogonaler Idempotente $e_1, \ldots, e_n \in \Gamma$ mit $e_1 + \ldots + e_n = 1_\Gamma$ existiert, sodass*

(i) Jedes e_i ist in A primitiv.

(ii) Für jedes i ist $e_i\Gamma e_i$ eine R-Maximalordnung in e_iAe_i (bzw. die *Maximalordnung in e_iAe_i, denn mit (i) und der Voraussetzung, dass A halbeinfach ist, folgt ja, dass e_iAe_i ein Schiefkörper ist).*

Satz 2.5.5 *Seien die Voraussetzungen wie in Definition 2.5.4, und insbesondere Γ eine graduierte R-Ordnung. Sei weiter*

$$K \otimes_R \Gamma = A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} D_i^{n_i \times n_i}$$

die Wedderburn-Zerlegung von A (die D_i sollen also Schiefkörper sein). Weiter bezeichne jeweis Θ_i die Maximalordnung in D_i und $\mathfrak{P}_i$ ihr maximales Ideal. Dann gilt:

(i) Die zentral-primitiven Idempotente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in Z(A)$ liegen bereits in Γ. Es gilt also

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{k} \varepsilon_i \Gamma$$

und jedes $\varepsilon_i\Gamma$ ist seinerseits wieder eine graduierte Ordnung.

(ii) *Die Gitter von $\varepsilon_i\Gamma$ im einfachen $\varepsilon_i A$-Modul V_i bilden einen Verband der die Bedingungen (L1) und (L2) aus Satz 2.5.1 erfüllt (klar nach Bemerkung 2.5.2), und dieser ist sogar distributiv, d. h. es existiert eine kompatible Basis für die $\varepsilon_i\Gamma$-Gitter in V_i.*

(iii) *Für jedes i existiert ein $v \in \mathbb{Z}_{>0}$, eine Matrix $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{v\times v}$ und Zahlen $(d_1, \ldots, d_v) \in \mathbb{Z}_{>0}^v$ mit $\sum_{k=1}^{v} d_k = n_i$ sodass*

$$\varepsilon_i\Gamma \cong \begin{bmatrix} \Theta_i^{d_1\times d_1} & [\mathfrak{P}_i^{m_{1,2}}]^{d_1\times d_2} & [\mathfrak{P}_i^{m_{1,3}}]^{d_1\times d_3} & \cdots & [\mathfrak{P}_i^{m_{1,v}}]^{d_1\times d_v} \\ [\mathfrak{P}_i^{m_{2,1}}]^{d_2\times d_1} & \Theta_i^{d_2\times d_2} & [\mathfrak{P}_i^{m_{2,3}}]^{d_2\times d_3} & \cdots & [\mathfrak{P}_i^{m_{2,v}}]^{d_2\times d_v} \\ [\mathfrak{P}_i^{m_{3,1}}]^{d_3\times d_1} & [\mathfrak{P}_i^{m_{3,2}}]^{d_3\times d_2} & \Theta_i^{d_3\times d_3} & \cdots & [\mathfrak{P}_i^{m_{3,v}}]^{d_3\times d_v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathfrak{P}_i^{m_{v,1}}]^{d_v\times d_1} & [\mathfrak{P}_i^{m_{v,2}}]^{d_v\times d_2} & [\mathfrak{P}_i^{m_{v,3}}]^{d_v\times d_3} & \cdots & \Theta_i^{d_v\times d_v} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

wobei die rechte Seite als Teilring von $\Theta_i^{n_i\times n_i}$ zu verstehen ist. Wir fordern zudem $m_{j,j} = 0$ für $j = 1, \ldots, v$ (o.B.d.A. , da die Diagonaleinträge von m in der obigen Definition gar nicht auftauchen). Ferner soll $m_{j_1,j_2}+m_{j_2,j_1} > 0$ für alle $j_1 \neq j_2$ gelten.

Wir nennen $(d_1, \ldots, d_v)$ Dimensionsvektor *und m eine* Exponentenmatrix *von $\varepsilon_i\Gamma$. Es sei aber angemerkt, dass die Exponentenmatrix nicht eindeutig durch den Isomorphietyp von $\varepsilon_i\Gamma$ festgelegt ist (nicht einmal bis auf Permutation der Zeilen und Spalten).*

Beweis.

(i) Sei $e_1, \ldots, e_l \in \Gamma$ ein Satz in A primitiver Idempotente mit $e_1 + \ldots + e_l = 1_\Gamma$ (der nach Definition einer graduierten Ordnung existieren muss). Es gilt

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i \cdot 1_\Gamma = \varepsilon_i \cdot (e_1 + \ldots + e_l) = \varepsilon_i e_1 + \ldots + \varepsilon_i e_l \tag{2.19}$$

Nun sind die e_j primitiv in A, und $e_j = \varepsilon_i e_j + (1 - \varepsilon_i)e_j$ ist eine Darstellung von e_j als Summe von zwei Idempotenten. Es gilt also entweder $\varepsilon_i e_j = e_j$ oder $\varepsilon_i e_j = 0$, in jedem Fall liegt also $\varepsilon_i e_j$ in Γ. Folglich liegt mit jedem Summanden auf der rechten Seite von (2.19) auch die linke Seite, also ε_i, in Γ. Das $\varepsilon_i\Gamma$ wieder graduiert ist folgt direkt aus der Definition.

(ii) Wir zeigen, dass eine kompatible Basis für V_i existiert. Die Distributivität folgt dann aus Satz 2.5.1. Dazu sei $e_1, \ldots, e_{n_i}$ primitive Idempotente in $\varepsilon_i\Gamma$ wie in Definition 2.5.4. Für jedes e_j haben wir eine Projektion $\pi_j : V_i \to V_i : v \mapsto v \cdot e_j$. Offensichtlich sind die π_j D-Linksvektorraumhomomorphismen, und Bild(π_j) ist eindimensional, denn sonst wäre π_j kein primitives Idempotent in $\mathrm{End}_D(V_i) \cong \varepsilon_i A$, und damit wäre e_j ebensowenig primitiv.

Bezeichne für $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ mit b_j ein Element in V_i mit Bild$(\pi_j) = D \cdot b_j$. Wir behaupten: $(b_1, \ldots, b_{n_i})$ ist eine kompatible Basis für den $\varepsilon_i\Gamma$-Gitterverband in V_i.

Denn sei $L \subset V_i$ ein $\varepsilon_i\Gamma$-Gitter in V_i. Dann ist, da die e_j alle in Γ liegen, $L = \sum_{j=1}^{n_i} \pi_j(L)$. Jedes $\pi_j(L)$ ist in $D \cdot b_j$ ein $e_j\Gamma e_j$-Rechtsgitter. Nach Definition 2.5.4 ist $e_j\Gamma e_j$ isomorph zu Θ, und Θ hat nur einen Isomorphietyp von eindimensionalen Gittern, nämlich Θ_Θ. $\mathrm{End}_{e_j\Gamma e_j}(\pi_j(L))$ muss also als R-Ordnung isomorph sein zu Θ^{op}, was eine Maximalordnung ist (wir hatten in Definition 2.4.19 angemerkt, dass diese Eigenschaft unabhängig von der Einbettung in $K \otimes_R \Theta^{\mathrm{op}} \cong D^{\mathrm{op}}$ ist). Identifizieren wir $\mathrm{End}_{e_jAe_j}(D \cdot b_j)$ mit D^{op}, so ist also $\mathrm{End}_{e_j\Gamma e_j}(\pi_j(L))$ gerade Θ^{op}, weil es die eindeutige Maximalordnung in D^{op} ist. Also ist $\pi_j(L)$ ein Θ-Linksgitter in $D \cdot b_j$, was als D-Linksvektorraum isomorph ist zu ${}_DD$. Folglich ist $\pi_j(L) = \mathfrak{P}^{z_j} \cdot b_j$ für ein $z_j \in \mathbb{Z}$, da alle Θ-Linksgitter in ${}_DD$ von der Form $\mathfrak{P}^z$ für ein $z \in \mathbb{Z}$ sind, und der Isomorphismus mit $D \cdot b_j$ gerade durch Multiplikation an b_j von Links induziert wird. Wir haben also $L = \sum_{j=1}^{n_i} \mathfrak{P}^{z_j} \cdot b_j$, womit gezeigt ist, dass $(b_1, \dots, b_{n_j})$ eine kompatible Basis bilden.

(iii) Seien $e_1, \dots, e_{n_j}$ die primitiven Idempotente von $\varepsilon_i\Gamma$ wie in (ii), und diese seien o.B.d.A. nach Isomorphietyp von $e_j\Gamma$ also Γ-Rechtsgitter sortiert. D. h. wir haben ein $v \in \mathbb{Z}_{>0}$ und ein $(d_1, \dots, d_v) \in \mathbb{Z}^n$, sodass

$$e_1\Gamma \cong e_2\Gamma \cong \ldots \cong e_{d_1}\Gamma,\ e_{d_1+1}\Gamma \cong \ldots \cong e_{d_1+d_2}\Gamma \text{ usw.}$$

und v sei minimal mit der Eigenschaft, dass bei passender Umsortierung der e_j ein solches $d \in \mathbb{Z}^v$ existiert.

Nun betrachten wir ein $\varepsilon_i\Gamma$-Gitter im einfachen ε_iA-Modul V_i. Nach (ii) existiert für diesen eine kompatible Basis $B = (b_1, \dots, b_{n_i})$, und diese kann nach dem Beweis von (ii) o.B.d.A. so gewählt werden dass $b_j \cdot e_k = b_j \cdot \delta_{jk}$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n_i\}$. Ferner kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz eines Erzeugers von $\mathfrak{P}$ von Links an die einzelnen b_j erreicht werden, dass diese eine Basis von L als Θ-Linksgitter bilden (gerade da B eine kompatible Basis ist). Folglich nehmen wir an dass B als Basis von L gewählt ist.

Wir betrachten nun die folgende Kette von Einbettungen:

$$\iota:\ \varepsilon_i\Gamma \hookrightarrow \Theta^{n_i\times n_i}:\ \left\{\begin{array}{ccccc} \varepsilon_i\Gamma & \hookrightarrow & \mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L) & \overset{\sim}{\hookrightarrow} & \Theta^{n_i\times n_i} \\ x & \mapsto & [l \mapsto l \cdot x] & & \\ & & \varphi & \mapsto & {}_B\varphi_B \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Der Punkt ist nun, dass $\varepsilon_i\Gamma = \bigoplus_{j_1,j_2} e_{j_1}\Gamma e_{j_2}$ ist, und damit $\varepsilon_i\Gamma \cong \iota(\varepsilon_i\Gamma) = \bigoplus_{j_1,j_2} \iota(e_{j_1}\Gamma e_{j_2})$ gilt. Betrachten wir also $e_{j_1}\gamma e_{j_2}$ für $\gamma \in \Gamma$. Es gilt $b_{j_3}e_{j_1}\gamma e_{j_2} = 0$ falls $j_3 \neq j_1$, und damit hat $\iota(e_{j_1}\gamma e_{j_2})$ nur in der j_1-ten Zeile Einträge ungleich Null. Genauso sieht man ein, dass da alle e_{j_3} mit $j_3 \neq j_2$ auf $b_{j_1}e_{j_1}\gamma e_{j_2}$ wie Null operieren, $b_{j_1}e_{j_1}\gamma e_{j_2} = c \cdot b_{j_2}$ gelten muss für ein $c \in \Theta$, also $[\iota(e_{j_1}\gamma e_{j_2})]_{s,t} = c \cdot \delta_{sj_1} \cdot \delta_{tj_2}$ gilt. Weiter ist $\iota(\varepsilon_i\Gamma)$ natürlich auch graduiert, womit $\mathrm{Diag}(\Theta, \dots, \Theta) \subseteq \iota(\varepsilon_i\Gamma)$. Mit $[c \cdot \delta_{sj_1} \cdot \delta_{tj_2}]_{s,t}$ liegen somit auch $[\Theta \cdot c \cdot \Theta \cdot \delta_{sj_1} \cdot \delta_{tj_2}]_{s,t}$ in $\iota(\varepsilon_i\Gamma)$. Somit ist klar, dass $\iota(\varepsilon_i\Gamma)$ von der Form $[\mathfrak{P}^{z_{s,t}}]_{s,t\in\{1,\dots,n_i\}} \subseteq \Theta^{n_i\times n_i}$ für passende $z_{s,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sein muss.

Wir müssen nun zeigen, dass $z_{s,t} = 0$ wenn $e_s\Gamma \cong e_t\Gamma$. Dazu nutzen wir aus, dass $\mathrm{Hom}_\Gamma(e_s\Gamma, e_t\Gamma) \cong e_t\Gamma e_s$, wo der Homomorphismus, der von $e_t\gamma e_s$ induziert wird gerade $e_s\Gamma \to e_t\Gamma : \ e_s \cdot v \mapsto e_t \cdot \gamma \cdot e_s \cdot v$ ist. Es existiert also, da insbesondere ein Epimorphismus von $e_s\Gamma$ nach $e_t\Gamma$ existiert, ein γ_0 und ein v_0 in Γ mit $e_t\gamma_0 e_s v_0 = e_t$, woraus $e_t\gamma_0 e_s \cdot e_s v_0 e_t = e_t$ folgt. Also gilt

$$\iota(e_t\gamma_0 e_s) \cdot \iota(e_s v_0 e_t) = \iota(e_t) \tag{2.21}$$

Nun haben wir oben aber gesehen, dass $[\iota(e_t)]_{j_1,j_2} = \delta_{j_1 t} \cdot \delta_{j_2 t}$, sowie $[\iota(e_s v_0 e_t)]_{j_1,j_2} = \delta_{j_1 s} \cdot \delta_{j_2 t} \cdot c_0$ für ein $c_0 \in \mathfrak{P}^{z_{s,t}}$. Wäre $z_{s,t} > 0$, so müssten alle Einträge der Matrix auf der rechten Seite von (2.21) in $\mathfrak{P}$ liegen, was nicht der Fall ist. Also gilt $z_{s,t} = 0$.

Wir haben jetzt also $\mathrm{Diag}(\Theta^{d_1\times d_1}, \Theta^{d_2\times d_2}, \ldots, \Theta^{d_v\times d_v}) \subseteq \iota(\varepsilon_i\Gamma)$. Also müssen für $s, t \in \{1, \ldots, v\}$ sowie $j_s \in \{1, \ldots, d_s\}, j_t \in \{1, \ldots, d_t\}$ die Spalten $[\mathfrak{P}^{z_{d_1+\ldots+d_{s-1}+1,j_t}}, \ldots, \mathfrak{P}^{z_{d_1+\ldots+d_{s-1}+d_s,j_t}}]^\top$ $\Theta^{d_s\times d_s}$-Links- und die Zeilen $[\mathfrak{P}^{z_{j_s,d_1+\ldots+d_{t-1}+1}}, \ldots, \mathfrak{P}^{z_{j_s,d_1+\ldots+d_{t-1}+d_t}}]$ $\Theta^{d_t\times d_t}$-Rechtsmoduln sein. Es folgt also $z_{d_1+\ldots+d_{s-1}+1,j_t} = \ldots = z_{d_1+\ldots+d_{s-1}+d_s,j_t}$ und $z_{j_s,d_1+\ldots+d_{t-1}+1} = \ldots = z_{j_s,d_1+\ldots+d_{t+1}+d_t}$, was zeigt dass $\iota(\varepsilon_i\Gamma)$ von der Form wie in (2.18) mit Dimensionsvektor d ist.

Angenommen es gäbe $j_1 \neq j_2$ mit $m_{j_1,j_2} + m_{j_2,j_1} = 0$, also $m_{j_1,j_2} = m_{j_2,j_1} = 0$, da die Einträge von m alle positiv sind. Dann gäbe es also s und t mit $d_1 + \ldots + d_{j_1-1} < s \leq d_1 + \ldots + d_{j_1}$ und $d_1 + \ldots + d_{j_2-1} < t \leq d_1 + \ldots + d_{j_2}$ sowie Elemente $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, sodass

$$\iota(e_s\gamma_1 e_t) \cdot \iota(e_t\gamma_2 e_s) = \iota(e_s)$$

Da ι eine Einbettung ist folgt $e_s\gamma_1 e_t \cdot e_t\gamma_2 e_s = e_s$. Wir haben also Γ-Homomorphismen $\varphi_1 : \ e_t\Gamma \longrightarrow e_s\Gamma : \ e_t x \mapsto e_s\gamma_1 e_t x$ und $\varphi_2 : \ e_s\Gamma \longrightarrow e_t\Gamma : \ e_s x \mapsto e_t\gamma_2 e_s x$ mit $\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \mathrm{id}_{e_s\Gamma}$. Wir folgern, dass φ_1 surjektiv sein muss, und da $\dim_R e_s\Gamma = \dim_R e_t\Gamma$ gilt, muss es damit auch injektiv sein. Wir hätten also $e_s\Gamma \cong e_t\Gamma$. Das haben wir am Anfang des Beweises aber durch die Sortierung der Idempotente nach Isomorphietyp von $e_j\Gamma$ ausgeschlossen. Es muss also $m_{j_1,j_2} + m_{j_2,j_1} > 0$ gelten. □

Wir haben in Satz 2.5.5 gesehen, dass graduierte R-Ordnungen in halbeinfachen K-Algebren die direkte Summe ihrer Projektionen auf die einzelnen Wedderburn-Komponenten sind. Es reicht also graduierte R-Ordnungen in einfachen K-Algebren zu betrachten. Diese, so haben wir gesehen, lassen sich durch Exponentenmatrizen und Dimensionsvektor beschreiben. Der folgende Satz sagt uns nun, dass umgekehrt jede Exponentenmatrix (die ein paar Voraussetzungen an die Einträge erfüllt) eine graduierte Ordnung beschreibt, und wie wir die irreduziblen Gitter der Ordnung aus der Exponentenmatrix ablesen können.

Satz 2.5.6 *Sei R vollständiger diskreter Bewertungsring, $K = \mathrm{Quo}(R)$, D ein endlichdimensionaler Schiefkörper über K, Θ die R-Maximalordnung in D, $\mathfrak{P}$ ihr maximales Ideal und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sei* $v \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d \in \mathbb{Z}^v$ *mit* $\sum d_i = n$ *und* $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{v \times v}$. *Das Gitter*

$$\Gamma(\Theta, m, d) := \left[(\mathfrak{P}^{m_{i,j}})^{d_i \times d_j}\right]_{i,j} \subseteq D^{n \times n} \tag{2.22}$$

ist eine R*-Ordnung genau dann, wenn*

- *(a)* $m_{k,k} = 0$ *für* $k \in \{1, \ldots, v\}$
- *(b)* $m_{i,j} + m_{j,k} \geq m_{i,k}$

(ii) $\Gamma(\Theta, m, d)$ *ist eine graduierte Ordnung in* $D^{n \times n}$.

(iii) *Ist* L *ein* $\Gamma(\Theta, m, d)$*-Gitter in* $D^{1 \times n}$, *so existiert ein* $l \in \mathbb{Z}^v$ *sodass*

$$L = \left[\begin{array}{cccc} (\mathfrak{P}^{l_1})^{1 \times d_1} & (\mathfrak{P}^{l_2})^{1 \times d_2} & \cdots & (\mathfrak{P}^{l_v})^{1 \times d_v} \end{array}\right] \subseteq D^{1 \times n} \tag{2.23}$$

Umgekehrt definiert ein $l \in \mathbb{Z}^v$ *über (2.23) genau dann ein* $\Gamma(\Theta, m, d)$*-Gitter, wenn*

$$l_i \leq l_j + m_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, v\} \tag{2.24}$$

Wir nennen l *Exponentenvektor des Gitters* L.

(iv) *Zwei* $\Gamma(\Theta, m, d)$*-Gitter in* $D^{1 \times n}$ *gegeben durch Exponentenvektoren* l *und* l' *sind isomorph genau dann wenn* $l - l' = [z, z, \ldots, z]$ *für ein* $z \in \mathbb{Z}$.

(v) *Gilt* $m_{i,j} + m_{j,i} > 0$ *für alle* $i \neq j$ *(was wir durch passende Wahl des Dimensionsvektors immer erreichen können), so hat* $\Gamma(\Theta, m, d)$ *genau* v *Isomorphietypen einfacher Moduln. Wir haben zudem genau* v *Isomorphietypen von Gittern in* $D^{1 \times n}$ *mit einfachen Radikalquotienten, und dabei handelt es sich genau um die projektiv-unzerlegbaren* $\Gamma(\Theta, m, d)$*-Moduln. Die Exponentenvektoren der projektiven* $\Gamma(\Theta, m, d)$*-Gitter sind gerade durch die Zeilen der Matrix* m *gegeben.*

Beweis.

(i) $m_{k,k} = 0$ für alle k ist notwendig und hinreichend dafür, dass $1_{D^{n \times n}} \in \Gamma(\Theta, m, d)$. $m_{i,j} + m_{j,k} \geq m_{i,k}$ ist äquivalent dazu, dass $\Gamma(\Theta, m, d)$ unter Multiplikation abgeschlossen ist, denn

$$\begin{aligned} \Gamma(\Theta, m, d)^2 &= \left[\textstyle\sum_{j=1}^v (\mathfrak{P}^{m_{i,j}})^{d_i \times d_j} \cdot (\mathfrak{P}^{m_{j,k}})^{d_j \times d_k}\right]_{i,k} \\ &= \left[(\mathfrak{P}^{\min_j\{m_{i,j}+m_{j,k}\}})^{d_i \times d_k}\right]_{i,k} \overset{!}{\subseteq} \left[(\mathfrak{P}^{m_{i,k}})^{d_i \times d_k}\right]_{i,k} \end{aligned}$$

ist offenbar äquivalent zu $\min_j\{m_{i,j} + m_{j,k}\} \leq m_{i,k}$.

(ii) Dass $\Gamma(\Theta, m, d)$ enthält direkt nach Definition einen vollständigen Satz orthogonaler in $D^{n \times n}$ primitiver Idempotente, nämlich $e_i := [\delta_{ji} \cdot \delta_{ki}]_{j,k}$. Es gilt $e_i \Gamma(\Theta, m, d) e_i = e_i \Theta e_i$, und das ist eine Maximalordnung in $e_i D e_i$, da Θ als Maximalordnung in D gewählt ist.

(iii) Seien $e_1, \dots, e_n$ wie oben. Wir betrachten die Idempotente $f_i := \sum_{k=1}^{d_i} e_{d_1+\dots+d_{i-1}+k}$. Nach Definition ist $f_i\Gamma(\Theta, m, d)f_i = f_i\Theta^{n\times n}f_i \cong \Theta^{d_i\times d_i}$. Ist also $L \subset D^{1\times n}$ ein $\Gamma(\Theta, m, d)$-Gitter, so ist $L \cdot f_i$ ein $f_i\Theta^{n\times n}f_i$-Gitter in $D^{1\times n}f_i$, also von der Form $(\mathfrak{P}^{l_i})^{1\times n}f_i$. Dann gilt also $L = \sum_{k=1}^{v}(\mathfrak{P}^{l_k})^{1\times n}f_k = [(\mathfrak{P}^{l_1})^{1\times d_1}, \dots, (\mathfrak{P}^{l_v})^{1\times d_v}]$, wie behauptet.

Andersherum: Ist l gegeben, so ist $L := [(\mathfrak{P}^{l_1})^{1\times d_1}, \dots, (\mathfrak{P}^{l_v})^{1\times d_v}]$ ein $\Gamma(\Theta, m, d)$-Gitter genau dann, wenn $L \cdot \Gamma(\Theta, m, d) \subseteq L$, also wenn

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathfrak{P}^{l_i})^{1\times d_i}\right]_i \cdot \left[(\mathfrak{P}^{m_{i,j}})^{d_i\times d_j}\right]_{i,j} \\
= \; &\left[\textstyle\sum_{i=1}^{v}(\mathfrak{P}^{l_i+m_{i,j}})^{1\times d_j}\right]_j \\
= \; &\left[(\mathfrak{P}^{\min_i\{l_i+m_{i,j}\}})^{1\times d_j}\right]_j \\
\overset{!}{\subseteq} \; &\left[(\mathfrak{P}^{l_j})^{1\times d_j}\right]_j
\end{aligned}$$

Das ist nun äquivalent zu $l_i + m_{i,j} \geq l_j$ für alle i.

(iv) $\mathrm{End}_{D^{n\times n}}(D^{1\times n}) \cong D^{\mathrm{op}}$, wo Elemente aus D^{op} durch heranmultiplizieren von links operieren. Da die (gebrochenen) zweiseitigen Ideale von Θ in D alle von der Form $\mathfrak{P}^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) sind, und $\mathfrak{P}$ sich von einem Element Π erzeugen lässt, sind alle $D^{n\times n}$-Endomorphismen von $D^{1\times n}$ im Sinne der obigen Identifikation von der Form $e\cdot\Pi^k\cdot e'$, wo $e, e' \in \Theta^*$ und $k \in \mathbb{Z}$. Da sich $\Gamma(\Theta, m, d)$-Homomorphismen zwischen zwei Gittern in $D^{1\times n}$ K-linear zu $D^{n\times n}$-Homomorphismen fortsetzen (denn $\Gamma(\Theta, m, d)$ ist eine volle R-Ordnung in $D^{n\times n}$), sind also auch alle Homomorphismen zwischen Gittern in $D^{1\times n}$ von dieser Form. Sind also L und L' zwei $\Gamma(\Theta, m, d)$-Gitter in $D^{1\times n}$ mit Exponentenvektoren l und l', so hat $e \cdot \Pi^k \cdot e' \cdot L$ Exponentenvektor $l + [k, \dots, k]$, L und L' sind also genau dann isomorph, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $l + [k, \dots, k] = l'$, wie behauptet.

(v) Seien $e_1, \dots, e_n$ wie in (ii). Offenbar sind die $e_i\Gamma(\Theta, m, d)$ irreduzible $\Gamma(\Theta, m, d)$-Gitter, deren Exponentenvektor gerade die zu e_i gehörige Zeile der Exponentenmatrix ist. Wir haben also maximal v Isomorphietypen von projektiv unzerlegbaren $\Gamma(\Theta, m, d)$-Moduln. Die Zusatzbedingung $m_{i,j} + m_{j,i} > 0$ für $i \neq j$ stellt sicher, dass für $i \neq j$ die Zeilen $m_{i,-}$ und $m_{j,-}$ verschieden sind (denn entweder gilt $m_{i,j} > 0 = m_{j,j}$ oder dasselbe mit i und j vertauscht). Die Zeilen sind modulo Addition von ganzzahligen Vielfachen von $[1, \dots, 1]$ normiert, in dem Sinne dass ihre Einträge alle ≥ 0 sind und sie eine Null enthalten (nämlich $m_{i,i}$ bzw. $m_{j,j}$). Da ein solcher Vertreter eindeutig ist folgt, dass $m_{i,-} - m_{j,-}$ ($i \neq j$) kein ganzzahliges Vielfaches von $[1, \dots, 1]$ sein kann. Mit (iv) folgt also dass wir tatsächlich *genau* v Isomorphietypen projektiv unzerlegbarer Moduln haben (und damit auch genau v Isomophietypen einfacher Moduln). □

Folgerung 2.5.7 *Aus 2.5.6 (iii) und (v) folgt, dass wenn L ein $\Gamma(\Theta, m, d)$-Gitter ist, dann ist die Vielfachheit jedes einfachen $\Gamma(\Theta, m, d)$-Moduls als Kompositionsfaktor von $\frac{L}{\mathfrak{P}L}$* genau *eins.*

Beweis. Ist L durch Exponentenvektor l gegeben, so ist $\mathfrak{P}L$ durch Exponentenvektor $l+\underbrace{[1,\dots,1]}_{v \text{ mal}}$ gegeben. Eine echt dazwischen liegende Kette von $\Gamma(\Theta, m, d)$-Moduln hat also maximal Länge $v-2$. Also length $\frac{L}{\mathfrak{P}L} \leq v$. Andererseits muss jeder einfache $\Gamma(\Theta, m, d)$ als Kompositionsfaktor vorkommen (denn wir wissen dass jeder einfache Modul einmal in $\frac{L}{\mathfrak{p}L}$ vorkommen muss, und $\frac{L}{\mathfrak{P}L} \cong \frac{\mathfrak{P}L}{\mathfrak{P}^2L} \cong \ldots \cong \frac{\mathfrak{P}^{k-1}L}{\mathfrak{p}L}$, wo k so gewählt ist dass $\mathfrak{P}^k = \mathfrak{p}\cdot\Theta$). Zusammen folgt also length $\frac{L}{\mathfrak{P}L} = v$ und jeder einfache Modul kommt genau einmal als Kompositionsfaktor vor. □

Folgerung 2.5.8 *Voraussetzungen wie bisher. Eine graduierte, volle R-Ordnung Γ in $D^{n\times n}$ ist gleich dem Schnitt aller R-Maximalordnungen in $D^{n\times n}$, die Γ umfassen.*

Beweis. Gemäß Satz 2.5.5 können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\Gamma = \Gamma(\Theta, m, d)$ für eine Exponentenmatrix $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{v\times v}$ und einen Dimensionsvektor $d \in \mathbb{Z}_{>0}^{v}$ (wo $v \in \mathbb{N}$). Wir definieren zu jeder Zeile $m_{i,-}$ von m die Matrix

$$T_i = \mathrm{Diag}(\underbrace{\Pi^{m_{i,1}}, \ldots, \Pi^{m_{i,1}}}_{d_1 \text{ mal}}, \Pi^{m_{i,2}}, \ldots, \underbrace{\Pi^{m_{i,v}}, \ldots, \Pi^{m_{i,v}}}_{d_v \text{ mal}})$$

wobei Π ein Erzeuger von $\mathfrak{P}$ sei. Dann ist offenbar $T_i^{-1}\cdot\Theta^{n\times n}\cdot T_i = \left[(\mathfrak{P}^{m_{i,k}-m_{i,j}})^{d_j\times d_k}\right]_{j,k}$. Somit gilt

$$\bigcap_{i=1}^{v} T_i^{-1}\cdot\Theta^{n\times n}\cdot T_i = \left[\left(\mathfrak{P}^{\max_i\{m_{i,k}-m_{i,j}\}}\right)^{d_j\times d_k}\right]_{j,k}$$

Nun gilt mit Satz 2.5.6 (i) (b), dass $m_{j,k} \geq m_{i,k} - m_{i,j}$. Wegen $m_{j,j} = 0$ gilt für $i = j$ Gleichheit. Also $\max_i\{m_{i,k} - m_{i,j}\} = m_{j,k}$, und damit

$$\bigcap_{i=1}^{v} T_i^{-1}\cdot\Theta^{n\times n}\cdot T_i = \left[(\mathfrak{P}^{m_{j,k}})^{d_j\times d_k}\right]_{j,k} = \Gamma(\Theta, m, d)$$

womit, da die $T_i^{-1}\cdot\Theta^{n\times n}\cdot T_i$ Maximalordnungen sind, die Aussage gezeigt ist. □

Lemma 2.5.9 (Graduierte Ordnung aus distributivem Gitterverband) *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 2.5.1 und $\mathfrak{L}$ sei distributiv ((2.14)), bzw. äquivalent habe eine kompatible Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ ((2.13)). Dann gilt*

$$\Gamma := \bigcap_{L\in\mathfrak{L}} \underbrace{\mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L)}_{\subseteq D^{n\times n}} = \bigcap_{L\in\mathfrak{L}} \{X \in D^{n\times n} \mid L\cdot X \subseteq L\}$$

ist eine graduierte volle R-Ordnung in $D^{n\times n}$.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass es sich bei B um die Standardbasis von $D^{1\times n}$ handelt. Betrachte die Projektionen $\pi_i : D^{1\times n} \longrightarrow D^{1\times n} : \sum_{j=1}^n \theta_j b_j \mapsto \theta_i b_i$, wo $\theta_1, \dots, \theta_n \in \Theta$. Nach Definition einer kompatiblen Basis gilt $\pi_i(L) \subseteq L$ für alle $L \in \mathfrak{L}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Folglich liegt π_i in $\mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L)$ für alle i, bzw. wenn wir wie oben $\mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L)$ als Teilmenge von $D^{n\times n}$ auffassen, so liegt ${}_B\pi_{iB}$ in $\mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L)$. Somit liegt also ${}_B\pi_{iB}$ in Γ für alle i. Die ${}_B\pi_{iB}$ bilden einen vollständigen Satz primitiver, orthogonaler Idempotente in $D^{n\times n}$, nämlich gerade die Standardidempotente $[\delta_{ij} \cdot \delta_{ik}]_{j,k}$. Weiterhin umfasst jedes $\mathrm{End}_\Theta({}_\Theta L)$ auch ${}_B\pi_{iB}\Theta^{n\times n}{}_B\pi_{iB} \cong \Theta$ (argumentation wie oben, da alle L nach Vorraussetzung von der Form (2.13) sind). Folglich ist ${}_B\pi_{iB}\Gamma{}_B\pi_{iB}$ eine Maximalordnung in ${}_B\pi_{iB}D^{n\times n}{}_B\pi_{iB}$, womit Γ eine graduierte Ordnung ist (vgl. Definition 2.5.4). $\square$

Bemerkung 2.5.10 *Zusammen mit Satz 2.5.5 (ii) haben wir also graduierte Ordnungen in $D^{n\times n}$ charakterisiert als Schnitt der Θ-Endomorphismenringe aller Gitter in einem distributiven Verband gemäß Satz 2.5.1.*

Bemerkung 2.5.11 *Nach Satz 2.5.6 sind alle Rechtsgitter einer graduierten Ordnung Γ auch Θ Linksgitter. Da jeder einfache Γ-Moduln als Qutient zweier Γ-Gitter vorkommt (gemäß Folergung 2.4.9) ist auch jeder einfache Γ-Modul ein Θ-Γ-Bimodul.*

Definition 2.5.12 (Graduierte Hülle) *(*Anmerkung: Diese Definition ist nicht äquivalent zu der in [Ple83]. Was wir hier definieren würde dort als "graduierte Überordnung, die in einer erblichen Hülle enthalten ist" bezeichnet werden.*) Bezeichnungen wie bisher. Zu einer vollen R-Ordnung Λ in $D^{n\times n}$ bezeichnen wir eine graduierte Ordnung Γ, die Λ umfasst, als eine* graduierte Hülle *von Γ, sofern die folgende Bedingung erfüllt ist: Ist S ein einfacher Γ-Modul, so ist $S|_\Lambda$ ein einfacher Θ-Λ-Bimodul (gemäß 2.5.11 können wir S als Θ-Γ-Bimodul auffassen).*

Bemerkung 2.5.13 *Die Forderung der letzten Definition ist äquivalent dazu, dass eine Γ-Kompositionsreihe von $\frac{L}{\mathfrak{P}L}$ (L irreduzibles Γ-Gitter) auch eine Θ-Λ-Bimodulkompositionsreihe ist. Aus Folgerung 2.5.7 ist die Anzahl der Isomorphietypen einfacher Moduln einer graduierte Hülle von $\Lambda \subset D^{n\times n}$ also genau die Länge einer Θ-Λ-Bimodulkompositionsreihe von $\frac{L}{\mathfrak{P}L}$ für ein irreduzibles Θ-Λ-Bigitter L.*

Satz 2.5.14 (Existenz einer graduierten Hülle) *Ist Λ eine volle R-Ordnung in $D^{n\times n}$, so existiert eine graduierte Hülle von Λ.*

Beweis. Wähle ein Θ-Λ-Bigitter L_0. Wähle Θ-Λ-Bigitter L_i sodass

$$L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq L_{v-1} \supsetneqq L_v = \mathfrak{P} \cdot L_0$$

und L_i sei jeweis maximal in L_{i-1} (als Θ-Λ-Bimodul). Offenbar ist $\mathfrak{L} := \bigcup_{k=0}^{v-1} \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \mathfrak{P}^z \cdot L_k$ ein Verband der die Voraussetzungen von Satz 2.5.1 über kompatible Basen erfüllt und im

Sinne selbigen Satzes ebenfalls distributiv (beide Aussagen sind trivial, da die Elemente aus $\mathfrak{L}$ eine Kette bilden). Mit Lemma 2.5.9 ist also

$$\Gamma := \bigcap_{k=0}^{v-1} \operatorname{End}_\Theta({}_\Theta L_k)$$

eine graduierte Ordnung. Da $\Lambda \subseteq \Gamma$ gilt, folgt, dass die Menge der Gitter von Γ in selbiger von Λ enthalten ist. Zusätzlich sind alle Γ-Gitter auch Θ-Γ-Bigitter, und somit ist L_i Γ-maximal in L_{i-1} für $i = 1, \ldots, v$. Somit sind die einfachen Γ-Moduln gegeben durch $\frac{L_i}{L_{i-1}}$, also einfach als Θ-Λ-Bigitter nach Konstruktion. □

Definition 2.5.15 *Seien Λ und Γ zwei volle R-Ordnungen in einer endlich-dimensionalen K-Algebra und $\Lambda \subseteq \Gamma$.*

(i) Sei L ein Λ-Modul. Wir definieren ein Γ-Gitter $L \cdot \Gamma$ wie folgt: Wir nehmen das Bild der kanonischen Homomorphismus $\iota: \ L \longrightarrow K \otimes_R L : \ m \mapsto 1 \otimes m$. $K \otimes_R L$ ist ein $K \otimes_R \Lambda$-Gitter, und wir können $K \otimes_R \Lambda$ mit $K \otimes_R \Gamma$ identifizieren, denn die Einbettung $\Lambda \hookrightarrow \Gamma$ setzt sich zu einem Isomorphismus zwischen $K \otimes_R \Lambda$ und $K \otimes_R \Gamma$ fort. Daher können wir $K \otimes_R L$ als Γ-Modul auffassen und

$$L \cdot \Gamma := \iota(L) \cdot \Gamma$$

definieren.

(ii) Für zwei Λ-Moduln L_1 und L_2 und ein $\alpha \in \operatorname{Hom}_\Lambda(L_1, L_2)$ können wir einen Homomorphismus $\alpha \cdot \Gamma \in \operatorname{Hom}_\Gamma(L_1 \cdot \Gamma, L_2 \cdot \Gamma)$ definieren über

$$\alpha \cdot \Gamma := \mathrm{id}_K \otimes_R \alpha|_{L_1 \cdot \Gamma}$$

Es ist klar dass $\operatorname{Bild}(\mathrm{id}_K \otimes_R \alpha) \subseteq L_2 \cdot \Gamma$, denn $\{1 \otimes m \mid m \in L_1\}$ erzeugt $L_1 \cdot \Gamma$ ale Γ-Modul, und wird nach Definition auf $\{1 \otimes \alpha(m) \mid m \in L_1\}$ abgebildet, was in $\{1 \otimes m \mid m \in L_2\}$ enthalten ist, was wiederum $L_2 \cdot \Gamma$ als Γ-Modul erzeugt. Zusammen mit der Γ-Linearität der Abbildung folgt also $\alpha \cdot \Gamma \in \operatorname{Hom}_\Gamma(L_1 \cdot \Gamma, L_2 \cdot \Gamma)$.

"$- \cdot \Gamma$" definiert einen additiven (kovarianten) Funktor von $\mathcal{M}_\Lambda$ nach $\mathcal{M}_\Gamma$.

Lemma 2.5.16 *Seien Λ, Γ zwei volle R-Ordnungen in einer endlich-dimensionalen K-Algebra A und $\Lambda \subseteq \Gamma$. Weiter seien L und L' Λ-Moduln und $\alpha \in \operatorname{Hom}_\Lambda(L, L')$ ein* Epimorphismus. *Dann ist $\alpha \cdot \Gamma \in \operatorname{Hom}(L \cdot \Gamma, L' \cdot \Gamma)$ ebenfalls ein Epimorphismus.*

Beweis. Aus $\alpha(L) = L'$ folgt

$$(\alpha \cdot \Gamma)(L \cdot \Gamma) \supseteq (\alpha \cdot \Gamma)(1 \otimes m \mid m \in L) = \{1 \otimes \alpha(m) \mid m \in L\} = \{1 \otimes m' \mid m' \in L'\}$$

Die rechte Seite ist nach Definition ein Γ-Erzeugendensystem von $L' \cdot \Gamma$, folglich gilt auch $(\alpha \cdot \Gamma)(L \cdot \Gamma) \supseteq L' \cdot \Gamma$. Die umgekehrte Inklusion ist klar, womit die Aussage gezeigt ist. □

Satz 2.5.17 (Anwendung von Lemma 2.5.3) *Sei $\Lambda \subseteq \Theta^{n\times n}$ eine volle R-Ordnung in $D^{n\times n}$. Weiter sei $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ endlich. Γ sei eine graduierte Hülle von Λ. Sei L ein irreduzibles Γ-Gitter und t sei die Länge von $\frac{L}{\mathfrak{P}\cdot L}$ als Θ-Λ-Bimodul. Dann gilt:*

(i) Definiere $\mathrm{SRQ}(\Gamma) := \{$ *Iso.-klassen irr. Γ-Gitter mit einfachem Radikalquotienten* $\}$. *Dann gilt* $|\,\mathrm{SRQ}(\Gamma)| = t$, *und es handelt sich genau um die projektiven Γ-Moduln.*

(ii) Definiere $\mathrm{SRQ}(\Lambda) := \{$ *Iso.-klassen irr. Λ-Gitter mit einfachem Radikalquotienten* $\}$. *Dann gilt* $|\,\mathrm{SRQ}(\Lambda)| \geq t$.

(iii) Für einen Γ-Gitter $P \in \mathrm{SRQ}(\Gamma)$ definiere

$$\mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(P) := \{ \text{ Iso.-klassen von } \Lambda\text{-Gittern } Q \text{ mit } Q\cdot\Gamma \cong_\Gamma P \ \} \cap \mathrm{SRQ}(\Lambda)$$

Dann gilt $\mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(Q) \neq \emptyset$ *für jedes* $P \in \mathrm{SRQ}(\Gamma)$.

(iv) Ist $Q \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(P)$ für ein $P \in \mathrm{SRQ}(\Gamma)$, so ist $\frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)}$ isomorph zu einem Λ-Kompositionsfaktor von $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)}\big|_\Lambda$.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass der Verband $\mathfrak{L}$ aller Λ-Gitter in $D^{1\times n}$ die Bedingungen (L1) und (L2) aus Satz 2.5.1 erfüllt, wobei wir in den Forderungen Θ als R wählen (haben wir in Bemerkung 2.5.2 (ii) gezeigt). Der Verband $\mathfrak{L}^*$ aller Γ-Gitter in $D^{1\times n}$ erfüllt die Bedingungen mit Θ unverändert, und ist zudem distributiv, da Γ graduiert ist. Trivialerweise gilt $\mathfrak{L}^* \subseteq \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^* \neq \emptyset$. Somit erfüllen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^*$ die Voraussetzungen aus Lemma 2.5.3.

(i) Folgt direkt aus Bemerkung 2.5.13 und daraus, dass die projektiv unzerlegbaren Gitter einer graduierten Ordnung alle irreduzibel sind (siehe Satz 2.5.6 (v)).

(ii) Folgt aus (iii), denn $X \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(X')$ und $Y \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(Y')$ mit $X\cdot\Gamma \cong X' \ncong_\Gamma Y' \cong Y\cdot\Gamma$ impliziert $X \ncong_\Lambda Y$.

(iii) Wähle einen Vertreter von P in $D^{1\times n}$ (den wir o.B.d.A. mit P bezeichen). Dann gilt $[P] := \{\mathfrak{P}^z\cdot P \mid z \in \mathbb{Z}\} \in \mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$ nach Definiton (wo $\mathrm{SRQ}(\mathfrak{L}^*)$ hier wie in 2.5.3 definiert sei). Dann ist weiter nach 2.5.3 $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{L}^*/\mathfrak{L}}([P]) \neq \emptyset$. Wähle also einen Vertreter Q eines Elements aus $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{L}^*/\mathfrak{L}}([P])$. Wir behaupten $Q \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(P)$. Denn $Q\cdot\Gamma$ (was wir in $D^{1\times n}$ identifizieren können) ist ein Γ-Gitter und umfasst Q, also existiert nach Definition von $\mathrm{Sub}_{\mathfrak{L}^*/\mathfrak{L}}([P])$ ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $Q \subseteq \mathfrak{P}^z\cdot P \subseteq Q\cdot\Gamma$. Da Q (als Menge) den Γ-Modul $Q\cdot\Gamma$ erzeugt folgt also $\mathfrak{P}^z\cdot P = Q\cdot\Gamma$ und damit $Q\cdot\Gamma \cong P$.

(iv) Wähle wie in (iii) einen Vertreter von P in $D^{1\times n}$ und wähle zu $Q \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}$ einen Vertreter, sodass zwischen Q und P keine weiteren Γ-Gitter liegen (geht direkt nach Definition). Offenbar gilt dann also $\mathrm{Jac}(P) \not\supseteq Q$ (denn sonst wäre $\mathrm{Jac}(P)$ ja ein Γ-Gitter zwischen Q und P). Also ist $\mathrm{Jac}(P)\cap Q$ ein echter Λ-Teilmodul von Q, also $\mathrm{Jac}(P)\cap Q \subseteq \mathrm{Jac}(Q)$, da $\mathrm{Jac}(Q)$ eindeutiger maximaler Teilmodul von Q nach Definition. Wir haben also

$$\frac{Q+\mathrm{Jac}(P)}{\mathrm{Jac}(P)} \cong \frac{Q}{Q\cap\mathrm{Jac}(P)} \twoheadrightarrow \frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)}$$

was die Behauptung zeigt, denn die linke Seite ist ein Teilstück von $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)}\big|_\Lambda$.

$\square$

2.6 Struktur der projektiv-unzerlegbaren Λ-Gitter

In diesem Kapitel sei stets R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} = \langle \pi \rangle_R$. Der Restklassenkörper $F := \frac{R}{\mathfrak{p}}$ sei von Charakteristik $p > 0$ und es gelte $|F| < \infty$. Ferner sei $K := \mathrm{Quo}(R)$ von Charakteristik Null. Λ sei eine endlich-dimensionale R-Ordnung und $A := K \otimes_R \Lambda$ sei halbeinfach.

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie sich die projektiv-unzerlegbaren Λ-Gitter aus den irreduziblen Λ-Gittern mit einfachem Radikalquotienten konstruieren lassen, was wir dann in Algorithmus 3.4.1 im nächsten Kapitel zur Anwendung bringen werden.

Lemma 2.6.1 *Sei S ein einfacher Λ-Modul, sowie $\mathcal{P}(S)$ dessen projektive Hülle. Weiterhin sei Q ein Λ-Gitter mit* $\dim K \otimes_R Q = \dim K \otimes_R \mathcal{P}(S)$ *und* $\frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)} \cong S$. *Dann gilt*

$$Q \cong \mathcal{P}(S)$$

Beweis. Seien $\varphi : \mathcal{P}(S) \longrightarrow S$ und $\psi : Q \longrightarrow S$ die natürlichen Epimorphismen auf den Radikalquotienten S. Dann bekommt man aus der Projektivität von $\mathcal{P}(S)$ ein $\vartheta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S), Q)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, two heads, "\psi"] & S \\ & P \arrow[u, two heads, "\varphi"'] \arrow[ul, "\vartheta"] \end{tikzcd}$$

Nun ist ϑ surjektiv, denn $\vartheta\psi = \varphi$ ist surjektiv, also $\mathrm{Bild}(\vartheta) \subsetneqq \mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Jac}(Q)$. Da $\mathrm{Jac}(Q)$ eindeutiger maximaler Teilmodul in Q ist folgt $\mathrm{Bild}(\vartheta) = Q$. Aus Dimensionsgründen ist nun $\mathrm{id}_K \otimes \vartheta$ Isomorphismus zwischen $K \otimes_R \mathcal{P}(S)$ und $K \otimes_R Q$, und demnach ϑ auch injektiv. Die Aussage folgt. $\square$

Da die Dimensionen der projektiv-unzerlegbaren Λ-Moduln aus den Zerlegungszahlen im Allgemeinen a priori bekannt sind reduziert sich mit diesem Lemma die Suche nach den projektiv-unzerlegbaren Moduln auf die Suche nach Gittern mit einfachem Radikalquotienten von passender Dimension. Der folgende Satz befasst sich mit deren Konstruktion (in Algorithmus 3.4.1 werden wir das dann als Algorithmus formulieren).

Satz 2.6.2 *Seien X, Y Λ-Gitter mit $\frac{X}{\mathrm{Jac}(X)} \cong \frac{Y}{\mathrm{Jac}(Y)} \cong S$ einfach. Ferner gebe es kein Λ-Gitter ungleich $\{0\}$, das epimorphes Bild von sowohl X als auch Y ist.*

Es sei ein System $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Λ-Moduln gegeben zusammen mit *(i) Epimorphismen* $\varepsilon_i : M_i \twoheadrightarrow M_{i-1}$ *für alle* $i > 0$

(ii) Epimorphismen $\psi_i^{(X)} : X \twoheadrightarrow M_i$ *und* $\psi_i^{(Y)} : Y \twoheadrightarrow M_i$ *für alle* $i \in I$ *sodass* $\psi_i^{(X)}\varepsilon_i = \psi_{i-1}^{(X)}$ *und* $\psi_i^{(Y)}\varepsilon_i = \psi_{i-1}^{(Y)}$ *für alle* $i > 0$

Dann gilt:

(1) Jedes solche System von Moduln wird stationär, d. h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *sodass alle* ε_j *mit* $j \geq n_0$ *Isomorphismen sind.*

(2) Konstruiert man induktiv ein solches System und wählt die ε_i *mit nicht-trivialem Kern, so kommt man also irgendwann zu einem Modul* M_k*, für den keine* $M_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \psi_{k+1}^{(X)}, \psi_{k+1}^{(Y)}$ *mehr existieren die (i) bis (iii) erfüllen und für die* ε_{k+1} *kein Isomorphismus ist. Für dieses* maximale M_k *gilt dann, dass der Pullback*

$$P := \{(x, y) \in X \oplus Y \mid \psi_k^{(X)}(x) = \psi_k^{(Y)}(y)\}$$

im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_k & X \arrow[l, two heads, "\psi_k^{(X)}"'] \\ Y \arrow[u, two heads, "\psi_k^{(Y)}"] & P \arrow[l, "\pi_Y"] \arrow[u, "\pi_X"'] \end{tikzcd} \qquad (\textit{wobei } \pi_X((x,y)) := x,\ \pi_Y((x,y)) := y) \tag{2.25}$$

einfachen Radikalquotienten isomorph zu S *hat. Des weiteren sind die Projektionen* π_X *und* π_Y *surjektiv.*

Beweis.

(1) Angenommen es existiert $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ sodass (i) bis (iii) erfüllt sind und $\mathrm{Kern}(\varepsilon_i) \neq \{0\}$ für alle i. Setze $M_\infty := \varprojlim M_i$. Angenommen M_∞ ist ein Torsionsmodul (als R-Modul). Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ sodass $\pi^k \in \mathrm{Ann}_R(M_\infty)$. Es folgt automatisch $\pi^k \in \mathrm{Ann}_R(M_i)$ für alle i, denn alle M_i sind epimorphe Bilder von M_∞. Da aber nun alle M_i auch epimorphe Bilder von X sind folgt somit, dass alle M_i sogar epimorphe Bilder von $\frac{X}{\pi^k X}$ sind. Selbiger hat aber bereits als R-Modul endliche Länge, während M_i mindestens Länge i hat (Widerspruch).

Folglich ist M_∞ kein Torsionsmodul, $\frac{M_\infty}{t(M_\infty)}$ also ein Λ-Gitter ungleich $\{0\}$ (der R-Torsionsteilmodul eines Λ-Moduls ist trivialerweise auch ein Λ-Teilmodul). M_∞ ist nach den Eigenschaften des inversen Limes epimorphes Bild von sowohl X als auch Y, selbiges gilt demnach auch für $\frac{M_\infty}{t(M_\infty)}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Sei $J < P$ ein maximaler Teilmodul. Dann haben wir zwei Möglichkeiten:

(a) $\pi_X(J) = X$. Wir zeigen, dass dieser Fall nicht auftreten kann, da M_k dann nicht maximal im obigen Sinne ist: Es ist

$$\{0\} \neq \frac{P}{J} = \frac{\text{Kern}(\pi_X) + J}{J} \cong \frac{\text{Kern}(\pi_X)}{\text{Kern}(\pi_X) \cap J}$$

also $\text{Kern}(\pi_X) \cap J < \text{Kern}(\pi_X)$ und damit auch

$$\pi_Y(\text{Kern}(\pi_X) \cap J) < \pi_Y(\text{Kern}(\pi_X)) \tag{2.26}$$

denn $\text{Kern}(\pi_Y) \cap \text{Kern}(\pi_X) = \{0\}$, also $\pi_Y|_{\text{Kern}(\pi_X)}$ injektiv.
Es gilt $\pi_Y(\text{Kern}(\pi_X)) = \text{Kern}(\psi_k^{(Y)})$, denn $y \in \pi_Y(\text{Kern}(\pi_X)) \iff (0, y) \in P \iff 0 = \psi_k^{(X)}(0) = \psi_k^{(Y)}(y) \iff y \in \text{Kern}\left(\psi_k^{(Y)}\right)$. Wir haben also

$$M_k \cong \frac{Y}{\text{Kern}\left(\psi_k^{(Y)}\right)} = \frac{Y}{\pi_Y(\text{Kern}\,\pi_X)}$$

und damit nach (2.26) einen Epimorphismus

$$\varepsilon_{k+1}: \ M_{k+1} := \frac{Y}{\pi_Y(\text{Kern}(\pi_X) \cap J)} \longrightarrow M_k$$

mit nicht-trivialem Kern. Weiter setzen wir

$$\psi_{k+1}^{(Y)}: \ Y \longrightarrow M_{k+1}: \ y \mapsto y + \pi_Y(\text{Kern}(\pi_X) \cap J)$$

$$\psi_{k+1}^{(X)}: \ X \longrightarrow M_{k+1}: \ x \mapsto \pi_Y(\pi_X^{-1}(\{x\}) \cap J)$$

Wohldefiniertheit überprüft man leicht.
Aus dem Diagramm (2.25) liest man ab, dass wenn man o.B.d.A. $M_k = \frac{Y}{\pi_Y(\text{Kern}(\pi_X))}$ setzt, dann lauten die Abbildungsvorschriften

$$\psi_k^{(Y)}: \ Y \longrightarrow M_k: \ y \mapsto y + \pi_Y(\text{Kern}(\pi_X))$$

$$\psi_k^{(X)}: \ X \longrightarrow M_k: \ x \mapsto \pi_Y(\pi_X^{-1}(\{x\}))$$

Also ist $\psi_k^{(X)} = \psi_{k+1}^{(X)}\varepsilon_k$ und $\psi_k^{(Y)} = \psi_{k+1}^{(Y)}\varepsilon_k$. Das System war also nicht maximal, was ein Widerspruch ist. $\pi_X(J) = X$ kann also nicht auftreten.

(b) $\pi_X(J) < X$, also $\pi_X(J) \leq \text{Jac}(X)$. Also gilt

$$J \leq \text{Kern}\left(\underbrace{P \xrightarrow{\pi_X} X \longrightarrow \frac{X}{\text{Jac}(X)}}_{=:\alpha}\right)$$

Bild$(\alpha) = \frac{X}{\mathrm{Jac}(X)} \cong S$ ist einfach, also Kern(α) maximal in P, und da J auch maximal in P ist folgt $J =$ Kern(α). Da Fall (a) nicht auftreten konnte ist Kern(α) also der eindeutige maximale Teilmodul von P. Damit also

$$\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} = \frac{P}{\mathrm{Kern}(\alpha)} \cong \mathrm{Bild}(\alpha) \cong S$$

wie behauptet.

□

Bemerkung 2.6.3 *Die Vorraussetzung im letzten Satz, dass X und Y keine gemeinsamen R-torsionsfreien epimorphen Bilder haben scheint theoretisch ersteinmal schwer verifizierbar. Man hat jedoch folgende Fälle, in denen diese Voraussetzung gegeben ist:*

(i) Wenn $\mathrm{Hom}_A(K \otimes_R X, K \otimes_R Y) = \{0\}$*, d. h. wenn $K \otimes X$ und $K \otimes Y$ zu verschiedenen Wedderburn-Komponenten von A "gehören". Sind also ε_1 und ε_2 Idempotente in $Z(A)$ mit $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$, so eignet sich das Lemma, die projektiv unzerlegbaren $\varepsilon_i\Lambda$-Moduln P_i mit Kopf S zum projektiv-unzerlegbaren $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Lambda$-Modul mit Kopf S zu verkleben.*

(ii) Wenn X und Y irreduzibel sind, und $X \not\cong Y$ als Λ-Moduln. X ist dann nämlich bis auf Isomorphie das einzige Λ-Gitter das epimorphes Bild von X ist (analog für Y).

Aus (i) folgt, dass wir uns auf eine einfache K-Algebra einschränken können (genauer: auf die $\varepsilon_i A$ für zentral-primitive Idempotente ε_i in A), und sich die projetiv unzerlegbaren Λ-Moduln durch Pullbacks aus den projektiv-unzerlegbaren $\varepsilon_i\Lambda$-Moduln konstruieren lassen.

Das Problem das auftritt, wenn wir bei (ii) die Forderung "X irreduzibel" weglassen, ist, dass wir nicht sicher sein können, dass ein irreduzibles Λ-Gitter Y mit $\frac{Y}{\mathrm{Jac}(Y)} \cong \frac{X}{\mathrm{Jac}(X)}$ existiert, dass nicht epimorphes Bild von X ist.

Lemma 2.6.4 *Sei $A = K \otimes \Lambda$ einfach, Γ eine graduierte Hülle für Λ und X ein Λ-Gitter. $Q_1, \ldots, Q_k$ seien irreduzible Λ-Gitter sodass jeweils ein Λ-Epimorphismus $\varphi_i : X \twoheadrightarrow Q_i$ existiert (für $i = 1, \ldots, k$) und*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim_R Q_i = \dim_R X$$

Sei nun $Q_i \cdot \Gamma$ jeweils projektiver Γ-Modul (d. h. liege in $\mathrm{SRQ}(\Gamma)$*), und gelte $Q_i \cdot \Gamma \not\cong Q_j \cdot \Gamma$ für alle $i \neq j$. Dann folgt*

$$X \cdot \Gamma \cong_\Gamma \bigoplus_{i=1}^{k} Q_i \cdot \Gamma \tag{2.27}$$

Insbesondere folgt: Ist Q ein weiteres irreduzibles Λ-Gitter mit $Q \cdot \Gamma \in \mathrm{SRQ}(\Gamma)$ und

$$Q \cdot \Gamma \not\cong_\Gamma Q_i \cdot \Gamma \ \forall i = 1, \ldots, k$$

so folgt, dass kein *Λ-Epimorphismus $\varphi : X \twoheadrightarrow Q$ existiert.*

Beweis. Da $\varphi_i : X \longrightarrow Q_i$ epimorph ist, folgt mit Lemma 2.5.16, dass $\varphi_i \cdot \Gamma : X \cdot \Gamma \longrightarrow Q_i \cdot \Gamma$ ein Epimorphismus ist. Per Voraussetzung sind die $Q_i \cdot \Gamma$ projektive Γ-Moduln, und da projektive Epimorphe Bilder von Moduln direkte Summanden von selbigen sind (allgemein), folgt, dass jedes $Q_i \cdot \Gamma$ direkter Summand von $X \cdot \Gamma$ ist. Nach Satz von Krull-Schmidt hat $X \cdot \Gamma$ eine bis auf Reihenfolge eindeutige Zerlegung als direkte Summe projektiv unzerlegbarer Γ-Gitter. Da die $Q_i \cdot \Gamma$ paarweise nicht-isomorph sind muss also auch $\bigoplus_{i=1}^k Q_i \cdot \Gamma$ ein direkter Summand von $X \cdot \Gamma$ sein. Nach (2.27) folgt nun aus Dimensionsgründen, dass $\bigoplus_i Q_i \cdot \Gamma \cong X \cdot \Gamma$ gelten muss.

Zum Zusatz: Mit $\varphi : X \twoheadrightarrow Q$ wäre mit demselben Argument wie oben $Q \cdot \Gamma$ ein direkter Summand von $X \cdot \Gamma$. Damit wäre aber auch $\bigoplus_i Q_i \cdot \Gamma \oplus Q \cdot \Gamma$ ein direkter Summand von $X \cdot \Gamma$, was nicht sein kann, da die R-Dimension des direkten Summanden größer wäre als die von $X \cdot \Gamma$. □

Lemma 2.6.5 *Sei $K \otimes \Lambda \cong D^{n \times n}$ und Θ die R-Maximalordnung in D. Ist $\hat{S}$ ein einfacher Θ-Λ-Bimodul, so ist $\hat{S}$ als Λ-Modul halbeinfach und es existiert ein einfacher Λ-Modul S und ein $k \in \mathbb{N}$ sodass*

$$\hat{S} \cong_\Lambda \bigoplus^k S$$

Es gilt

$$k \leq \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$$

Beweis. $\hat{S}$ ist als F-Vektorraum von endlicher Dimension, also finden wir einen minimalen Λ-Teilmodul $S \leq_\Lambda \hat{S}$. Wir wählen dieses S als das S aus der Behauptung. Nun operiert $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ von links auf den Elementen von $\hat{S}$ (denn $\mathfrak{P} \cdot \hat{S}$ ist nach Nakayama-Lemma ein echter Teilmodul von $\hat{S}$, also $= \{0\}$) und damit auf denen von S. Nun ist $\sum_{\vartheta \in \Theta} \vartheta \cdot S$ ein nicht-trivialer Θ-Λ-Teilbimodul von $\hat{S}$, also gleich $\hat{S}$. Alle $\vartheta \cdot S$ sind Λ-Moduln und als solche isomorph zu S oder $\{0\}$. Folglich ist $\hat{S}$ als Λ-Modul halbeinfach (da Summe einfacher Moduln), und da alle Summanden isomorph zu S sind gilt $\hat{S}|_\Lambda \cong \bigoplus^k S$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Damit ist nun $\mathrm{End}_\Lambda(\hat{S}|_\Lambda) \cong \mathrm{End}_\Lambda(S)^{k \times k}$. Die Elemente aus $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ operieren auf $\hat{S}$ durch Λ-Endomorphismen, was uns eine Einbettung (als F-Algebren) $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}} \hookrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(\hat{S}) \cong \mathrm{End}_\Lambda(S)^{k \times k}$ liefert (injektiv, da $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ ein Schiefkörper ist). Damit wird $M := \mathrm{End}_\Lambda(S)^{1 \times k}$ zu einem $\mathrm{End}_\Lambda(S)$-$\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Bimodul. Als solcher ist M einfach, denn M ist halbeinfach (da $\mathrm{End}_\Lambda(S)^{\mathrm{op}} \otimes_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ ein halbeinfacher Ring ist) und wäre $M = M_1 \oplus M_2$ eine nicht-triviale Zerlegung, so wären die Projektionen $\pi_i : M \twoheadrightarrow M_i$ $\mathrm{End}_\Lambda(S)$-$\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Bimodulhomomorphismen, lägen also in $\mathrm{End}_\Lambda(S)^{k \times k}$ und würden mit den Bildern von $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ in $\mathrm{End}_\Lambda(S)^{k \times k}$ kommutieren. Somit können π_1, π_2 als nicht-triviale, orthogonale Idempotente in $\mathrm{End}_\Lambda(\hat{S})$ aufgefasst werden, die mit den Bildern der Elemente aus $\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ kommutieren. Folglich sind $\pi_i(\hat{S})$ nicht-triviale Θ-Λ-Biteilmoduln von $\hat{S}$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Einfachheit von $\hat{S}$.

Damit ist k die $\mathrm{End}_\Lambda(S)$-Dimension eines einfachen $\mathrm{End}_\Lambda(S)$-$\frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Bimoduls, und damit die Dimension eines direkten Summanden von $\mathrm{End}_\Lambda(S)^{\mathrm{op}} \otimes_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$ aufgefasst als $\mathrm{End}_\Lambda(S)^{\mathrm{op}} \otimes_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$-Rechtsmodul. Wir folgern

$$k \leq \frac{\dim_F \mathrm{End}_\Lambda(S)^{\mathrm{op}} \otimes_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}}{\dim_F \mathrm{End}_\Lambda(S)} = \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$$

□

Folgerung 2.6.6 *Sei $A := K \otimes \Lambda \cong D^{n\times n}$, V der einfache $K \otimes_R \Lambda$-Rechtsmodul, Θ die Maximalordnung in D, $\mathfrak{P}$ ihr maximales Ideal, und Γ eine graduierte Hülle von Λ. Weiter sei S ein einfacher Λ-Modul. Dann folgt:*

(i) Es existieren mindestens

$$N := \left\lceil \frac{D_{V,S}}{\dim_K \mathrm{End}_A(V)} \right\rceil$$

($D_{V,S}$ wie in der Definition der Zerlegungszahlen) nicht-isomorphe irreduzible, projektive Γ-Gitter $P_1, \ldots, P_N$, sodass jedes $Q_i \in \mathrm{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(P_i)$ Kopf $\frac{Q_i}{\mathrm{Jac}(Q_i)} \cong S$ hat.

(ii) Ist X irgendein Λ-Teilgitter von von $\bigoplus_{i=1}^{l} Q_i$ mit $l \leq N$, sodass die Projektionen $\pi_i : X \longrightarrow Q_i$ jeweils surjektiv sind, so existiert kein Λ-Epimorphismus von X auf Q_k für $k = l+1, \ldots, N$. Wir können also Satz 2.6.2 iteriert anwenden, um ein Λ-Gitter $P \leq \bigoplus_{i=1}^{N} Q_i$ mit $\pi_i(P) = Q_i$ und $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} \cong S$ zu erhalten.

(iii) Gilt zusätzlich $\mathrm{End}_\Lambda(S) \cong F$, so ist das in (ii) konstruierte P der projektiv unzerlegbare Λ-Modul mit Kopf S.

Beweis.

(i) Sei L ein Γ-Gitter in V und

$$\mathfrak{P} \cdot L = L_k \subsetneq L_{k-1} \subsetneq \ldots \subsetneq L_1 \subsetneq L_0 = L$$

eine Γ-Kompositionsreihe von $\frac{L}{\mathfrak{P}\cdot L}$ (und damit automatisch auch eine Θ-Λ-Kompositionsreihe nach Definition einer graduierten Hülle). Wir wissen, dass S in einer Λ-Kompositionsreihe von $\frac{L}{\mathfrak{p}\cdot L}$ genau $D_{V,S}$ mal als Kompositionsfaktor vorkommt (denn so ist $D_{V,S}$ definiert). Weiterhin existiert ein e mit $\mathfrak{P}^e = \mathfrak{p} \cdot \Theta$, und $\mathfrak{p} \cdot L = \mathfrak{P}^e \cdot L \subsetneq \mathfrak{P}^{e-1} \cdot L \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{P}^0 \cdot L = L$ ist eine Kette von Teilmoduln, sodass die Subquotienten $\frac{\mathfrak{P}^i \cdot L}{\mathfrak{P}^{i+1} \cdot L}$ jeweils isomorph zu $\frac{L}{\mathfrak{P}\cdot L}$ sind. Folglich ist die Vielfachheit von S als Kompositionsfaktor von $\frac{L}{\mathfrak{P}\cdot L}$ genau $\frac{D_{V,S}}{e}$. Nach Lemma 2.6.5 kommt in den Quotienten $\frac{L_i}{L_{i+1}}$ entweder S nicht als Kompositionsfaktor vor, oder $\frac{L_i}{L_{i+1}} \cong_\Lambda \bigoplus^l S$

mit $l \leq \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$. Folglich ist die Anzahl der $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ mit $\frac{L_i}{L_{i+1}} \cong \bigoplus S$ größer oder gleich $\frac{D_{V,S}}{e \cdot \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}}$. Es gilt $e = \operatorname{length}_\Theta \frac{\Theta}{\mathfrak{p} \cdot \Theta}$ und $\dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}} = \operatorname{length}_R \frac{\Theta}{\mathfrak{P}}$, also

$$\begin{aligned} e \cdot \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{P}} &= \operatorname{length}_\Theta \frac{\Theta}{\mathfrak{p} \cdot \Theta} \cdot \operatorname{length}_R \frac{\Theta}{\mathfrak{P}} \\ &= \operatorname{length}_R \frac{\Theta}{\mathfrak{p} \cdot \Theta} \\ &= \dim_F \frac{\Theta}{\mathfrak{p} \cdot \Theta} = \dim_R \Theta = \dim_K \operatorname{End}_A(V) \end{aligned}$$

D. h. dass mindestens $N = \left\lceil \frac{D_{V,S}}{\dim_K \operatorname{End}_A(V)} \right\rceil$ nicht-isomorphe einfache Γ-Moduln existieren, die auf Λ-Eingeschränkt isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von S sind (da die Quotienten $\frac{L_i}{L_{i+1}}$ als Γ-Moduln aufgefasst gerade Vertreter der Isomorphieklassen einfacher Γ-Moduln sind). Jeder dieser einfachen Γ-Moduln hat eine projetive Decke. Diese nehmen wir als $P_1, \ldots, P_N$. Nach Satz 2.5.17 ist für ein $Q_i \in \operatorname{Sub}_{\Gamma/\Lambda}(P_i)$ der Kopf $\frac{Q_i}{\operatorname{Jac}(Q_i}$ ein Λ-Kompositionsfaktor von $\frac{P_i}{\operatorname{Jac}(P_i)} \cong \bigoplus S$, also $\frac{Q_i}{\operatorname{Jac}(Q_i)} \cong S$.

(ii) Folgt direkt aus Satz 2.6.2 und Lemma 2.6.4.

(iii) Folgt aus der Brauerreziprokität (Satz 2.4.8) und Lemma 2.6.1. Nach ersterer ist die Dimension der projektiven Decke von S gleich $\dim_K(V) \cdot D_{V,S} \cdot \frac{\dim_F \operatorname{End}_\Lambda(S)}{\dim_K \operatorname{End}_A(V}$. Wegen der Voraussetzung $\dim_F \operatorname{End}_\Lambda(S) = 1$ ist das genau gleich $\dim_K P$, aus Lemma 2.6.1 folgt also $P \cong \mathcal{P}(S)$. □

Bemerkung 2.6.7 *Um die obige Folgerung anzuwenden ist es nicht wesentlich, dass wir tatsächlich eine graduierte Hülle kennen. Wir können sie nämlich auch so lesen: Ist* $\operatorname{End}_\Lambda(S) \cong F$*, so ist* $\mathcal{P}(S)$ *das einzige* Λ*-Gitter mit Radikalquotient isomorph zu* S*, das jedes irreduzible* Λ*-Gitter mit Radikalquotient isomorph zu* S *als epimorphes Bild hat. Damit können wir Satz 2.6.2 stets induktiv so lange anwenden, bis wir gemäß Lemma 2.6.1 die projektive Decke von* S *gefunden haben.*

2.7 Bemerkungen zur Struktur der Wedderburn-Komponenten

Im folgenden sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} = \langle \pi \rangle_R$, $K := \operatorname{Quo}(R)$. Weiterhin fixieren wir $A = K^{n \times n}$, $V = K^{1 \times n}$ aufgefasst als der einfache A-Modul, und eine volle R-Ordnung Λ in A.

Eine zu $\varepsilon_i RG$ Morita-äquivalente R-Ordnung Λ (für ein zentral-primitives Idempotent in $\varepsilon_i \in KG$, G eine endliche Gruppe) ist hier natürlich das naheliegendste Anwendungsbeispiel. Aufgrund der obigen Bedingungen muss K allerdings Zerfällungskörper für $\varepsilon_i KG$ sein, sodass $\varepsilon_i RG$ ismomorph zu einem Matrixring über K ist. Der Grund warum wir diese Einschränkung hier machen ist, dass wir die R-Ordnungen in einem Schiefkörper (bzw.

auch in einer Körpererweiterung von K) nicht so einfach überblicken können, während R die *einzige* R-Ordnung in K ist.

Wir können aber gleich vorwegnehmen, dass wir hier nicht weit kommen werden, und uns daher in konkreten Fällen nichts anderes übrig bleibt, als zu rechnen.

Bemerkung 2.7.1 *Seien $P_1, \ldots, P_k$ die projektiv-unzerlegbaren Λ-Gitter. Dann können wir jedes P_i in eine direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{d_i} V$ einbetten, wobei sich die d_i über die Brauerreziprokitätsformel aus den Zerlegungszahlen bestimmen lassen.*

Dann lässt sich die Basisordnung von Λ wie folgt in eine volle Matrixalgebra einbetten

$$\begin{aligned} & \mathrm{End}_\Lambda(P_1 \oplus \ldots \oplus P_k)^{\mathrm{op}} \\ \cong \quad & \left([\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)]_{i,j}, +, \circ \right) \\ \hookrightarrow \quad & \left(\left[\mathrm{Hom}_A(\bigoplus^{d_i} V, \bigoplus^{d_j} V) \right]_{i,j}, +, \circ \right) \\ \cong \quad & K^{\sum_i d_i \times \sum_i d_i} \end{aligned}$$

Sind alle $d_i = 1$, so enthält die Basisordnung offensichtlich einen (in $K^{\sum d_i \times \sum d_i}$) vollständigen Satz primitiver, orthogonaler Idempotente, nämlich gerade die Bilder der Projektionen auf die P_i (aufgefasst als Elemente in $\mathrm{End}_\Lambda(P_1 \oplus \ldots \oplus P_k)$) unter der obigen Kette von Isomorphismen/Einbettungen. Daher ist im Fall, dass alle $d_i = 1$ sind, Λ eine graduierte Ordnung (denn die zweite Bedingung in Definition 2.5.4 fällt dadurch weg, dass R die einzige R-Ordnung in $\mathrm{End}_A(V)^{\mathrm{op}} \cong K$ ist). In diesem Fall müssten wir also nur noch die Exponentenmatrix von Λ bestimmen, was der in [Ple83] gewählte Ansatz ist.

Sind nun nicht alle $d_i = 1$, so wäre es notwendig, die möglichen Isomorphietypen von $\mathrm{End}_\Lambda(P_i)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow K^{d_i \times d_i}$ zu bestimmen, was zumindest für den Fall $d_i = 2$ gelingt (der Ansatz, volle R-Ordnungen in $K^{d_i \times d_i}$ zu klassifizieren wird natürlich mit größerem d_i schwieriger, daher macht es vermutlich wenig Sinn, dies für $d_i > 2$ weiterzuführen).

Bemerkung 2.7.2 *Sei Γ eine Ordnung in einer halbeinfachen K-Algebra B, $u \in Z(B)^*$, und Γ bezüglich T_u selbstdual. Gilt $A = \varepsilon_i B$ und $\Lambda = \varepsilon_i \Gamma$ für ein zentral-primitives Idempotent $\varepsilon_i \in B$, so folgt mit Lemma 2.4.16 $\Lambda \supseteq \Lambda^{\sharp, \varepsilon_i u}$.*

Entsprechend gilt für ein primitives Idempotent $e \in \Gamma$, dass $\varepsilon_i e \Lambda e \supseteq (\varepsilon_i e \Lambda e)^{\sharp, \varepsilon_i e u}$, denn nach Satz 2.4.17 ist $e\Gamma e$ eine selbstduale Ordnung in eBe. $\varepsilon_i e$ ist ein primitives Idempotent in Λ, und damit ist $\varepsilon_i e \Lambda \varepsilon_i e$ isomorph zu $\mathrm{End}_\Lambda(e\Lambda)^{\mathrm{op}}$, was gerade der Endomorphismenring eines projektiv-unzerlegbaren Λ-Gitters ist.

Wir können also die Tatsache, dass die $\mathrm{End}_\Lambda(P_i)^{\mathrm{op}}$ ihr duales bezüglich einer Spurbilinearform T_u umfassen, benutzen, um die möglichen Isomorphietypen von $\mathrm{End}_\Lambda(P_i)^{\mathrm{op}}$ bei gegebenem u einzuschränken.

Das folgende Lemma ist im Wesentlichen elementar, und offenbar wohlbekannt.

Lemma 2.7.3 (Fall $d_i = 2$) *(i) Jede volle R-Ordnung Λ in $A = K^{2\times 2}$ ist konjugiert in $\mathrm{GL}(2,K)$ zu einer R-Ordnung in $R^{2\times 2}$ mit R-Basis der Form*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \pi^q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi^r & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi^s \end{bmatrix} \right\} \subset R^{2\times 2} \tag{2.28}$$

mit $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ (mit der Konvention $\pi^\infty := 0$), $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\alpha \in R$, wo gilt $r - \nu_\pi(\alpha) \leq s \leq r$, und natürlich o.B.d.A. $q < s$ oder $q = \infty$. Andersherum ist jedes R-Gitter von $R^{2\times 2}$, das eine Basis der obigen Form hat und die Bedingungen an q, r, s und α erfüllt, eine R-Ordnung.

(ii) Für $u = e \cdot \pi^{-d} \in Z(A) \cong K, d \in \mathbb{Z}$ und $e \in R^*$ gilt

$$\mathrm{discr}_u \Lambda = \mathfrak{p}^{-4\cdot d + 2\cdot r + 2\cdot s}$$

Es gilt $\Lambda \supseteq \Lambda^{\sharp,u}$ genau dann, wenn

(1) $d \geq 0$

(2) $2 \cdot r \leq \min\{2 \cdot d, \nu_\pi(\alpha) + \nu_\pi(2) + d\}$

(3) $2 \cdot s \leq \min\{2 \cdot d, d + \nu_\pi(2)\}$

(4) $q \geq s + r - d$

Beweis.

(i) Wir können o.B.d.A. eine Basis von Λ von der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:X_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}}_{=:X_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & e \end{bmatrix}}_{=:X_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}}_{=:X_4} \tag{2.29}$$

finden (denn wir wissen $X_1 = \mathrm{id}_{R^{2\times 2}} \in \Lambda$, und den Rest der Basis bekommen wir über Hermite-Form-Berechnung, wenn wir die Einträge der Matrizen in der richtigen Reihenfolge in Zeilen schreiben).

Wir wollen zuerst zeigen, dass wir durch Konjugation mit Matrizen in $\mathrm{GL}(2,K)$ die Ordnung Λ zu einer Ordnung $\Lambda' \subseteq R^{2\times 2}$ konjugieren können, die eine Basis der obigen Form mit $e = 0$ hat. D. h., um Verwirrungen bei den Fallunterscheidungen zu vermeiden, denn Fall $e = 0$ verwerfen wir stets. Wenn $\nu_\pi(e) \geq \nu_\pi(f)$ gilt können wir X_3 durch $X_3 - \frac{e}{f} \cdot X_4$ ersetzen, also haben wir in diesem Fall o.B.d.A. $e = 0$. Wir nehmen jetzt also an dass $\nu_\pi(e) < \nu_\pi(f)$ gilt. Definiere

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,R)$$

wobei $\gamma \in R$ noch festzulegen ist. Wir haben

$$T \cdot X_3 \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d - \gamma \cdot e & e \end{bmatrix}, T \cdot X_4 \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma \cdot f & f \end{bmatrix}$$

Gilt $\nu_\pi(d) \geq \nu_\pi(e)$, so können wir γ so wählen, dass $d - \gamma \cdot e = 0$ gilt. Wir können dann die mit T konjugierten X_i's wieder in die Form (2.29) bringen, nur dass die Bewertung von f echt kleiner wird (nämlich höchstens gleich $\nu_\pi(e)$, da $T \cdot X_3 \cdot T^{-1}$ die Rolle von X_4 übernehemn kann). Da die Bewertung von f nur endlich oft echt kleiner werden kann, kommen wir durch Iteration der bisherigen Schritte zu einer zu Λ konjugierten Ordnung mit $\nu_\pi(d) < \nu_\pi(e)$. Wie schon oben können wir wieder annehmen $\nu_\pi(e) < \nu_\pi(f)$ oder $e = 0$. Angenommen $e \neq 0$, also $\nu_\pi(d) < \nu_\pi(e) < \nu_\pi(f)$. Dann liegt $\frac{e \cdot b}{d}$ in R, also

$$X_3 \cdot X_2 - \frac{e \cdot b}{d} \cdot X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{e^2 \cdot b}{d} + d \cdot a + e \cdot c \end{bmatrix} \in \Lambda \subseteq R^{2 \times 2}$$

Also muss f, und damit auch e, $-\frac{e^2 \cdot b}{d} + d \cdot a + e \cdot c$ teilen. Somit teilt e auch $d \cdot a$, denn die anderen beiden Summanden teilt es trivialerweise. Wir konjugieren nun mit

$$T' := \begin{bmatrix} d & 0 \\ d & e \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, K) \quad \text{aber i. A.} \notin \mathrm{GL}(2, R)$$

Es gilt

$$X_1' := T' \cdot X_1 \cdot T'^{-1} = X_1,$$

$$X_2' := T' \cdot X_2 \cdot T'^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{da}{e} & \frac{da}{e} \\ \frac{be^2 - d^2a - dec}{ed} & \frac{da + ec}{e} \end{bmatrix},$$

$$X_3' := T' \cdot X_3 \cdot T'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

$$X_4' := T' \cdot X_4 \cdot T'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -f & f \end{bmatrix}$$

Aus $\frac{d \cdot a}{e} \in R$ folgt $X_2' \in R^{2 \times 2}$. Die anderen Matrizen liegen offensichtlich in $R^{2 \times 2}$, und

$$X_1', X_2' + \frac{d \cdot a}{e} \cdot X_1', X_4' - \frac{f}{e} \cdot X_3', X_3'$$

bildet also eine Basis wie in (2.29) mit $e = 0$.

Wir können Λ also immer zu einer Ordnung konjugieren, die eine Basis der Form (2.29) mit $e = 0$ hat. Durch Multiplikation der Basis mit passend gewählten Einheiten können wir die Basis dann auch auf die Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:X_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & \pi^q \end{bmatrix}}_{=:X_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi^r & 0 \end{bmatrix}}_{=:X_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi^s \end{bmatrix}}_{=:X_4} \tag{2.30}$$

mit $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Nun konjugieren wir noch mit

$$T'' := \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

um eine Basis wie in (2.28) zu bekommen. Die Bedingungen an q, r, s und α ergeben sich dann leicht daraus, dass Λ unter Multiplikation abgeschlossen sein muss.

(ii) Wir können o.B.d.A. sagen $u = \pi^{-d}$, also $e = 1_R$, denn die Werte von $T_{\pi^{-d}}$ und $T_{e \cdot \pi^{-d}}$ unterscheiden sich nur um Einheiten. Nun ist die Grammatrix von Λ bezüglich der Basis (2.28), hier bezeichnet mit B, gegeben durch

$$_B(T_u)^B = \begin{bmatrix} 2\,\pi^{-d} & \pi^{q-d} & 0 & \pi^{s-d} \\ \pi^{q-d} & 2\,\pi^{-d}\alpha + \pi^{-d+2\,q} & \pi^{r-d} & \pi^{q+s-d} \\ 0 & \pi^{r-d} & 0 & 0 \\ \pi^{s-d} & \pi^{q+s-d} & 0 & \pi^{2\,s-d} \end{bmatrix}$$

und es gilt $\det({}_B(T_u)^B) = -\pi^{-4 \cdot d + 2 \cdot r + 2 \cdot s}$, was die Behauptung über die Diskriminante zeigt. Nach Bemerkung 2.4.14 (iv) gilt $\Lambda \supseteq \Lambda^{\sharp, u}$ genau dann, wenn $\left({}_B(T_u)^B\right)^{-1}$ in $R^{4 \times 4}$ liegt. Wir rechnen aus

$$\left({}_B(T_u)^B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \pi^{d} & 0 & 0 & -\pi^{-s+d} \\ 0 & 0 & \pi^{-r+d} & 0 \\ 0 & \pi^{-r+d} & -2\,\pi^{d-2\,r}\alpha & -\pi^{q-s+d-r} \\ -\pi^{-s+d} & 0 & -\pi^{q-s+d-r} & 2\,\pi^{-2\,s+d} \end{bmatrix}$$

Bedingung (1) folgt nun aus dem $(1, 1)$-Eintrag, Bedingung (2) aus dem $(2, 3)$- und dem $(3, 3)$-Eintrag, Bedingung (3) aus dem $(1, 4)$- und dem $(4, 4)$-Eintrag, und Bedingung (4) aus dem $(3, 4)$-Eintrag. □

Bemerkung 2.7.4 *Da das α in (2.28) modulo π^r reduziert werden kann, wir bei gegebenem r also nur endlich viele Möglichkeiten für α haben, sieht man leicht, dass die Bedingungen (1) bis (4) im Teil (ii) des obigen Lemmas bei gegebenem d nur endlich viele Möglichkeiten für den Isomorphietyp von Λ lassen.*

Man kann übrigens leicht nachrechnen, dass alle Ordnungen der Form (2.28) eine Involution besitzen, sodass die Forderung, dass der Ring involutionsinvariant sein soll, auch keine weitere Einschränkung liefern würde.

Kapitel 3

Algorithmische Methoden

3.1 Generalvoraussetzungen

In diesem Kapitel sei stets R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} = \langle \pi \rangle_R$. Der Restklassenkörper $F := \frac{R}{\mathfrak{p}}$ sei von Charakteristik $p > 0$ und es gelte $|F| < \infty$. Ferner sei $K := \mathrm{Quo}(R)$ von Charakteristik Null. Λ sei eine endlich-dimensionale R-Ordnung und $A := K \otimes_R \Lambda$ sei halbeinfach. Λ sei als R-Algebra erzeugt von $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir gehen davon aus, dass wir in einem Teilring R' von R und in F rechnen können, den natürlichen Epimorphismus $R \twoheadrightarrow F$ für Elemente aus R' auswerten können, und elementare lineare Algebra über beiden Ringen durchführen können. Insbesondere müssen wir Kerne von Matrizen, Basen von Bildern von Matrizen (im Falle von F) sowie im Falle von R Hermite- und Smithformen ausrechenen können. Zudem sollten wir Schnitte und Summen von R-Teilmoduln von $R^{1\times q}$ bzw. $F^{1\times q}$ gegeben durch Basen ausrechenen können, und testen können, ob zwei solche R-Teilmoduln gleich sind.

Dass wir nur in R' rechnen können bedeutet natürlich, dass alle Rechnungen auch in diesem Teilring stattfinden müssen, und alle gegebenen Matrizen Einträge in R' haben müssen. In den Implementierung in GAP und MAGMA dieser Algorithmen haben wir $R = \mathbb{Z}_p$ und $R' = \mathbb{Z}$ (bzw. in manchen Situationen auch $R' = \mathbb{Z}_{(p)}$) gewählt. Das heißt also, dass wir nur Gruppenringe behandeln können, deren irreduziblen $\mathbb{Q}$-Darstellungen auch über $\mathbb{Q}_p$ irreduzibel bleiben.

Wenn wir im Folgenden von einem Λ-Modul M sprechen, so meinen wir stets, dass $M = F^{1\times q}$ oder $M = R^{1\times q}$ (andere Isomorphietypen von R-Moduln wären natürlich auch möglich, wir brauchen jedoch nur diese zwei) und wir kennen $\Delta_M(\lambda_1), \ldots, \Delta_M(\lambda_n) \in F^{q\times q}$ bzw. $R^{q\times q}$, wo $\Delta_M : \Lambda \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$ die zu M gehörige Darstellung von Λ ist. Wir gehen davon aus, dass uns für jeden einfachen A-Modul V ein Λ-Gitter in V im obigen Sinne gegeben ist. Seien $V_1, \ldots, V_m$ die einfachen A-Moduln, so bezeichnen wir mit $L_1, \ldots, L_m$ die gegebenen "Standardgitter" in selbigen. Ferner gehen wir stets davon aus, dass die einfachen Λ-Moduln $S_1, \ldots, S_s$ gegeben sind. Letzteres ist praktisch keine Einschränkung, denn mit $L_1, \ldots, L_m$ sind uns auch $\frac{L_1}{\mathfrak{p}\cdot L_1}, \ldots, \frac{L_m}{\mathfrak{p}\cdot L_m}$ gegeben (indem wir die Darstellungsmatrizen modulo $\mathfrak{p}$ nehmen), und sowohl GAP als auch MAGMA können die Kompositionsfaktoren mit Vielfachheiten (also auch die Zerlegungsmatrix) von so gegebenen Torsionsmoduln berechnen (z. B. mit `CompositionFactors` in MAGMA bzw. `MTX.CollectedFactors` in GAP).

3.2 Grundlegende Algorithmen

Algorithmus 3.2.1 ($\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ **generisch)** *Es seien M, N Λ-Moduln und $O \in \{F,R\}$ gemäß einer der folgenden drei Möglichkeiten gegeben:*

(i) $M = R^{1\times q}$, $N = R^{1\times r}$ *und* $O = R$

(ii) $M = R^{1\times q}$, $N = F^{1\times r}$ *und* $O = F$

(iii) $M = F^{1\times q}$, $N = F^{1\times r}$ *und* $O = F$

Definiere $X \in O^{q\cdot r\times q\cdot r\cdot n}$ durch

$$X_{x_1+q\cdot(y_1-1),x_2+q\cdot(y_2-1)+q\cdot r\cdot(z-1)} := \Delta_M(\lambda_z)_{x_2,x_1}\cdot\delta_{y_1y_2} - \delta_{x_2x_1}\cdot\Delta_N(\lambda_z)_{y_1,y_2}$$

für $x_1,x_2 \in \{1,\dots,q\}, y_1,y_2 \in \{1,\dots,r\}$ und $z \in \{1,\dots,n\}$. Berechne eine O-Basis $B_1,\dots,B_f$ von $\mathrm{Kern}\left(O^{1\times q\cdot r} \xrightarrow{X} O^{1\times q\cdot r\cdot n}\right)$*. Dann ist*

$$[H_l]_{i_1,i_2} := [(B_l)_{i_1+q\cdot(i_2-1)}]_{i_1,i_2} \in O^{q\times r}, \quad l = 1,\dots,f$$

eine O-Basis von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \subseteq O^{q\times r}$.

Beweis. Für $H \in O^{q\times r}$ gilt $H \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ genau dann, wenn

$$\Delta_M(\lambda_z)\cdot H - H\cdot\Delta_N(\lambda_z) = 0$$

für alle $z \in \{1,\dots,n\}$. Definiere $B \in O^{1\times q\cdot r}$ durch $B_{i_1+q\cdot(i_2-1)} := H_{i_1,i_2}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rrcl}
 & (\Delta_M(\lambda_z)\cdot H - H\cdot\Delta_N(\lambda_z))_{x_2,y_2} & = & 0 \quad \forall x_2,y_2,z \\
\iff & \sum_{x_1=1}^{q}\Delta_M(\lambda_z)_{x_2,x_1}\cdot H_{x_1,y_2} + \sum_{y_1=1}^{r} H_{x_2,y_1}\cdot\Delta_N(\lambda_z)_{y_1,y_2} & = & 0 \quad \forall x_2,y_2,z \\
\iff & \sum_{x_1=1}^{q}\sum_{y_1=1}^{r} \underbrace{H_{x_1,y_1}}_{=B_{x_1+q\cdot(y_1-1)}} \cdot \underbrace{(\Delta_M(\lambda_z)\cdot\delta_{y_1y_2} + \delta_{x_1x_2}\cdot\Delta_N(\lambda_z)_{y_1,y_2})}_{=X_{x_1+q\cdot(y_1-1),x_2+q\cdot(y_2-1)+q\cdot r\cdot(z-1)}} & = & 0 \quad \forall x_2,y_2,z \\
\iff & B\cdot X & = & 0
\end{array}$$

was die Behauptung zeigt. □

Bemerkung 3.2.2 *Es gibt weit effizientere Algorithmen zur Berechnung von* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$*. Im Fall dass M oder N einfach ist, können wir in* GAP *auf* `MTX.Homomorphisms` *zurückgreifen (genaugenommen berechnet diese Funktion nur Homomorphismen* aus *einfachen Moduln in beliebige. Für die umgekehrte Version müssen wir die Darstellungsmatrizen jeweils transponieren). In* MAGMA *existiert die Funktion* `AHom`*, welche für beliebige Λ-Moduln M und N benutzt werden kann und wesentlich effizienter ist als der oben vorgestellte naive Ansatz. Um Homomorphismen zwischen* Gittern *zu berechnen können wir jedoch einen Algorithmus angeben, der in den meistens Situationen schneller ist als* `AHom`*. Voraussetzung dafür ist aber, dass wir für die Gitter M und N jeweils eine Einbettung in eine direkte Summe der in den Generalvoraussetzung fixierten "Standardgitter" $L_1,\dots,L_m$ kennen. Da wir unsere Gitter stets als Teilgitter von direkten Summen von bereits bekannten Gittern konstruieren werden, können wir diese Einbettung für das neue Gitter aus denen für die bekannten konstruieren (und da wir am Anfang nur $L_1,\dots,L_m$ kennen, bekommen wir die Einbettung letztendlich für jedes Gitter, das wir konstruieren).*

Algorithmus 3.2.3 ($\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ **für Gitter**) *Seien M und N Λ-Gitter. Weiter seien $(d_{M,1},\dots,d_{M,m})\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ und $(d_{N,1},\dots,d_{N,m})\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ mit $\sum_i d_{M,i}\cdot\dim_R L_i=\dim_R M$ (analog für N) gegeben sowie Matrizen $\iota_M\in R^{\dim_R M\times\dim_R M}$ und $\iota_N\in R^{\dim_R N\times\dim_R N}$ sodass $\iota_M\in\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\bigoplus_{i=1}^m\bigoplus^{d_{M,i}}L_i)$ und $\iota_N\in\mathrm{Hom}_\Lambda(N,\bigoplus_{i=1}^m\bigoplus^{d_{N,i}}L_i)$ jeweils Einbettungen sind (für die Operation von Λ auf direkten Summen nehmen wir die diagonal zusammmengefügten Operationsmatrizen von Λ auf den direkten Summanden).*

Weiter seien $E_1=(E_{1,1},\dots,E_{1,v_1})\in\mathrm{End}_A(V_1)^{v_1},\dots,E_m=(E_{m,1},\dots,E_{m,v_m})\in\mathrm{End}_A(V_m)^{v_m}$ Basen der A-Endomorphismenringe der $V_i=K\otimes_R L_i$ (jeweils aufgefasst als Teilmengen von $K^{\dim_R L_i\times\dim_R L_i}$).

Dann liefern die folgenden Schritte eine R-Basis von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$*:*

Schritte.

1. Stelle eine Basis $B\in(K^{\dim_R M\times\dim_R N})^{\sum_i d_{M,i}\cdot d_{N,i}\cdot v_i}$ von

   $$\mathrm{Hom}_A\big(\textstyle\bigoplus_{i=1}^m\bigoplus^{d_{M,i}}V_i,\bigoplus_{i=1}^m\bigoplus^{d_{N,i}}V_i\big)=\mathrm{Diag}(\mathrm{End}_A(V_1)^{d_{M,1}\times d_{N,1}},\dots,\mathrm{End}_A(V_m)^{d_{M,m}\times d_{N,m}})\subseteq K^{\dim_R M\times\dim_R N}$$

   auf (unter Verwendung der gegebenen Basen E_i).

2. Setzte $B'_i:=\iota_M\cdot B_i\cdot\iota_N^{-1}$ für $i\in\{1,\dots,\underbrace{\sum_{j=1}^m d_{M,j}\cdot d_{N,j}\cdot v_j}_{=:t}\}$.

3. Definiere die Matrix $X\in K^{\dim_R M\cdot\dim_R N\times t}$ durch

   $$X_{i_1+\dim_R M\cdot(i_2-1),j}:=(B'_j)_{i_1,i_2}$$

   für $j\in\{1,\dots,t\},i_1\in\{1,\dots,\dim_R M\},i_2\in\{1,\dots,\dim_R N\}$. Bestimme den Hauptnenner $\alpha\in R$ der Einträge in X, d. h. es soll gelten $\alpha\cdot X\in R^{\dim_R M\cdot\dim_R N\times t}$ Berechne eine R-Basis des Zeilenraums von $\alpha \cdot X$ und schreibe die Basiselemente in eine Matrix $X' \in R^{t\times t}$ (dass die Basis aus t Elementen besteht ist klar, denn die Spalten von X sind linear unabhängig über K).

4. Berechne die Smith-Form der Matrix X' sowie die zugehörigen Transformationsmatrizen $S \in \mathrm{GL}(t, R)$ und $T \in \mathrm{GL}(t, R)$, d. h. es soll gelten $S \cdot X' \cdot T = \mathrm{Diag}(e_1, \dots, e_t) =: E$ mit $e_1, \dots, e_t \in R$.

5. $B''_i := \sum_{j=1}^{t} \alpha \cdot (T \cdot E^{-1})_{j,i} \cdot B'_j$ für $i = 1, \dots, t$ ist die gesuchte R-Basis von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$.

Beweis. Zu Schritt 1 ist nichts zu zeigen. Das in Schritt 2 definierte B' ist offensichtlich eine K-Basis von $\mathrm{Hom}_A(K \otimes_R M, K \otimes_R N) \subseteq K^{\dim_R M \times \dim_R N}$, denn B war eine ebensolche für $\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^m \bigoplus^{d_{M,i}} V_i, \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus^{d_{N,i}} V_i\right)$ und wir haben lediglich mittels ι_M und ι_N die Basen gewechelt. Nun gilt

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) = \mathrm{Hom}_A(K \otimes_R M, K \otimes_R N) \cap R^{\dim_R M \times \dim_R N}$$

Das kann als die dem Algorithmus zugrundeliegende Idee angesehen werden. In den Schritten 3 bis 5 berechnen wir diesen Schnitt.

Um zu zeigen dass wir in den Schritten 3 bis 5 tatsächlich diesen Schnitt ausrechnen betrachten wir ein $a \in K^{t\times 1}$ und ordenen diesem $b := \sum_i a_i B'_i \in \mathrm{Hom}_A(K \otimes_R M, K \otimes_R N)$ zu. Es gilt $b \in R^{\dim_R M \times \dim_R N}$ genau dann, wenn $X \cdot a \in R^{\dim_R N \cdot \dim_R M \times 1}$ gilt. Das wiederum gilt offenbar genau dann, wenn $\frac{1}{\alpha} \cdot X' \cdot a \in R^{t\times 1}$ gilt. Es gilt $\frac{1}{\alpha} \cdot X' \cdot a = \frac{1}{\alpha} \cdot S^{-1} \cdot E \cdot T^{-1} \cdot a$, womit die letzte Aussage äquivalent dazu ist, dass $\frac{1}{\alpha} \cdot E \cdot T^{-1} \cdot a \in R^{t\times 1}$, denn $S \in \mathrm{GL}(t, R)$. Letzteres ist nun äquivalent zu $a \in \alpha \cdot T \cdot E^{-1} \cdot R^{t\times 1}$. Insgesamt gilt also: $b \in R^{\dim_R M \times \dim_R N}$ genau dann, wenn a im R-Erzeugnis der Spalten von $\alpha \cdot T \cdot E^{-1}$ liegt. Damit bilden die b's, die zu a's der Form $(\alpha \cdot T \cdot E^{-1})_{-,i}$ gehören, eine Basis von $\mathrm{Hom}_A(K \otimes M, K \otimes N) \cap R^{\dim M \times \dim N}$. Diese b's sind aber gerade die Elemente B''_i. □

Bemerkung 3.2.4 *Der obige Algorithmus liefert* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ *eingebettet in* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. *Wenn wir Endomorphismenringe von Gittern ausrechnen wollen, also* $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ *für ein* Λ*-Gitter* M*, dann wollen wir diesen Ring im Allgemeinen in einen Matrixring (oder direkte Summe von Matrixringen) kleinerer Dimension als* $\mathrm{End}_R(M)$ *eingebettet haben. Obwohl so eine Einbettung bei Homomorphismen zwischen verschiedenen Gittern weniger Sinn macht, bleiben wir im Folgenden bei den Voraussetzungen des letzten Algorithmus.*

Sei dazu für $i \in \{1, \dots, m\}$ *jeweils* $\Delta_i : \mathrm{End}_A(V_i) \longrightarrow X_i$ *ein* K*-Algebrenmonomorphismus in eine* K*-Algebra* X_i *(üblicherweise werden wir hier die reguläre Darstellung von* $\mathrm{End}_A(V_i)$ *in* $X_i := K^{\dim_K \mathrm{End}_A(V_i) \times \dim_K \mathrm{End}_A(V_i)}$ *nehmen). Dann können wir daraus einen* K*-Vektorraummonomorphismus*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus^{d_{M,i}} V_i, \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus^{d_{N,i}} V_i\right) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} X_i^{d_{M,i} \times d_{N,i}}$$

zusammenbauen, der für $M = N$ insbesondere ein K-Algebrenmonomorphismus ist. Wir können dann Schritt 5 des obigen Algorithmus ersetzen, und stattdessen

$$\sum_{j=1}^{t} \alpha \cdot (T \cdot E^{-1})_{j,i} \cdot \varphi(B_j) \quad \textit{für } i = 1, \ldots, t$$

zurückgeben, was eine Basis $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ *aufgefasst als R-Teilmdoul (bzw. R-Teilalgebra falls $M = N$) von $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i^{d_{M,i} \times d_{N,i}}$ ist.*

Algorithmus 3.2.5 (Maximale Teilmoduln) *Sei $M = F^{1\times q}$ ein Λ-Modul. Weiter sei $S = F^{1\times r}$ ein einfacher Λ-Modul. Dann bekommen wir alle maximalen Teilmoduln N von M mit $\frac{M}{N} \cong S$ (gegeben durch eine F-Vektorraumbasis) durch folgendes Vorgehen:*

Schritte.

1. Berechne die Menge E *aller Elemente* in $\mathrm{End}_\Lambda(S_i) \subseteq F^{r\times r}$. Berechne eine F-Basis $H = (H_1, \ldots, H_l)$ von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S_i) \subseteq F^{q\times r}$.

2. Setzte $V := \mathrm{Bild}(H_1^\top) \leq_F F^{1\times q}$ und $H' := \{H_1\}$. Nun durchlaufe *der Reihe nach* $i = 2, \ldots, l$ und teste jeweils, ob $\mathrm{Bild}(H_i^\top) \leq_F V$. Wenn nein, so ersetze V durch $V + \mathrm{Bild}(H_i^\top)$ und H' durch $H' \cup \{H_i\}$. Sonst tue nichts.

3. Berechne

$$T_{j,e} := H'_j + \sum_{i=j+1}^{|H'|} H'_i \cdot e_i \quad \text{für } 1 \leq j \leq |H'|,\ e = (e_{j+1}, \ldots, e_{|H'|}) \in E^{|H'|-j}$$

4. Die F-Vektorräume $\mathrm{Kern}(T_{j,e})$ sind die gesuchten maximalen Teilmoduln.

Beweis. Da S einfach ist, ist $E = \mathrm{End}_\Lambda(S)$ Schiefkörper (sogar Körper, da wir $|F| < \infty$ voraussetzen, aber das zeigen wir hier nicht). $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S)$ ist somit ein E-Vektorraum (Vektorraumoperation gegeben durch Komposition). Wir behaupten: H' ist eine E-Basis von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S)$. Sei dazu $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, S)$. Dann gilt nach Konstruktion von H' $\mathrm{Bild}(h^\top) \subseteq \sum_{i=1}^{|H'|} \mathrm{Bild}(H_i'^\top)$, was äquivalent ist zu $\mathrm{Kern}(h) \supseteq \bigcap_{i=1}^{|H'|} \mathrm{Kern}(H'_i)$. Also folgt nach Homomorphiesatz, dass ein $e \in \mathrm{End}_\Lambda(S)^{|H'|\times 1}$ existiert sodass

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\bigoplus_{i=1}^{|H'|} H'_i"] \arrow[dr, "h"'] & \bigoplus^{|H'|} S \arrow[d, "e"] \\ & S \end{tikzcd}$$

womit also gilt $h = \sum_{i=1}^{|H'|} H'_i \cdot e_i$, d. h. H' erzeugt $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S)$ als E-Vektorraum. Zur linearen Unabhängigkeit: Ist $0 \neq e \in E^{|H'|\times 1}$ und $i \in \{1, \ldots, |H'|\}$ maximal mit $e_i \neq 0$, so folgt nach Konstruktion von H'

$$\mathrm{Kern}(H'_i \cdot e_i) = \mathrm{Kern}(H'_i) \not\supseteq \bigcap_{j=1}^{i-1} \mathrm{Kern}(H'_j) = \bigcap_{j=1}^{i-1} \mathrm{Kern}(H'_j \cdot e_j) \subseteq \mathrm{Kern}\left(\sum_{j=1}^{i-1} H'_j \cdot e_j\right)$$

Daher gilt also $\sum_{j=1}^{|H'|} H'_j \cdot e_j \neq 0$, und somit sind die Elemente H' auch linear unabhängig über E.

Die in Schritt 3 konstruierten $T_{j,e}$ sind offensichtlich Vertreter der eindimensionalen E-Teilräumen von $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,S)$ (denn wir nehmen alle möglichen E-Linearkombinationen einer E-Basis und normieren den ersten Koeffizienten ungleich Null auf 1). Offenbar kommt jeder maximale Teilmodul N von M mit $\frac{M}{N} \cong S$ als Kern eines Elements $\neq 0$ aus $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,S)$ vor, und da $\mathrm{Kern}(h \cdot e) = \mathrm{Kern}(h)$ $\forall h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,S)$, $0 \neq e \in E$, folgt, dass zwei Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,S)$, die denselben eindimensionalen Teilraum aufspannen, denselben Kern haben. Somit ist jeder maximale Teilmodul N mit $\frac{M}{N} \cong S$ gleich einem $\mathrm{Kern}(T_{j,e})$ für ein passendes j und e. Sind umgekehrt $h, h' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,S)$ mit $\mathrm{Kern}(h) = \mathrm{Kern}(h')$, so existiert nach Homomorphiesatz ein $e \in E = \mathrm{End}_\Lambda(S)$ mit $h \cdot e = h'$, womit h und h' denselben Teilraum aufspannen. Die $\mathrm{Kern}(T_{j,e})$ sind also auch paarweise verschieden. □

Bemerkung 3.2.6 (Erweiterungen) *(i) Ist $M = R^{1\times q}$ ein Λ-Gitter, so können wir alle maximalen Teilgitter N von M mit $\frac{M}{N} \cong S$ bestimmen, indem wir alle maximalen Teilmoduln $\overline{N}$ von $\frac{M}{M\cdot\mathfrak{p}} = F^{1\times q}$ mit dieser Eigenschaft bestimmen, jeweils ein R-Gitter N' in $R^{1\times q}$ wählen sodass $\frac{N'}{N'\cdot\mathfrak{p}} = \overline{N}$ und $N := N' + M \cdot \mathfrak{p}$ setzen.*

(ii) Wenn wir alle einfachen Λ-Moduln $S_1, \ldots, S_s$ kennen, so können wir alle *maximalen Teilmoduln eines Λ-Moduls M bestimmen, indem wir Algorithmus 3.2.5 mit jeden der einfachen Λ-Moduln einmal durchführen.*

Beweis. Nur (i), (ii) ist klar. Zu zeigen ist nur, dass die maximalen Teilmoduln von M allesamt $M \cdot \mathfrak{p}$ umfassen (denn wir nehmen Urbilder der maximalen Teilmoduln von $\frac{M}{M\cdot\mathfrak{p}}$ unter dem natürlichen Epimorphismus). Das liegt daran, dass $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Jac}(\Lambda)$, also $M \cdot \mathfrak{p} \subseteq M \cdot \mathrm{Jac}(\Lambda) = \mathrm{Jac}(M)$. $\mathrm{Jac}(M)$ ist aber der Schnitt aller maximalen Teilmoduln von M. □

Bemerkung 3.2.7 *Wir bekommen mit obigem Algorithmus Basen von Teilmoduln N von $M = O^{1\times q}$, $O \in \{R, F\}$. Sei $B \in O^{\dim_O N \times \dim_O M}$ eine solche (d. h. die Zeilen von B sollen eine Basis von N bilden), und $B_R \in O^{\dim_O M \times \dim_O N}$ eine Rechtsinverse von B. Dann können wir $N' := O^{1\times \dim_O N}$ zu einem Λ-Modul ismomorph zu N machen, indem wir $\Delta_{N'}(\lambda) := B \cdot \Delta_M(\lambda) \cdot B_R$ für $\lambda \in \Lambda$ setzen. B liegt dann in $\mathrm{Hom}_\Lambda(N', M)$ (und offensichtlich induziert B einen Isomorphismus zwischen N' und $N \leq M$).*

Da für unsere Algorithmen die Moduln von der Form $O^{1\times k}$ mit gegebener Operation von Λ sein sollten, werden wir Teilmoduln stets wie oben umschreiben. Im Allgemeinen werden wir N' mit N identifizieren, und B als die Einbettung von N in M bezeichnen.

Algorithmus 3.2.8 (Zentrierungsalgorithmus) *Sei $L = R^{1\times q}$ ein irreduzibles Λ-Gitter. Die folgenden Schritte liefern eine Menge $\mathcal{L}$ von Teilgittern von L, sodass jeder Isomorphietyp von Λ-Gittern in $K \otimes_R L$ mindestens einmal in $\mathcal{L}$ vorkommt.*

Schritte. Setzte $\mathcal{L} := \emptyset$ und $\mathcal{N} := \{L\}$. Solange $\mathcal{N} \neq \emptyset$ wiederhole die folgenden Schritte:

1. Setzte $\mathcal{N}' := \emptyset$.
2. Berechne für jedes $L' \in \mathcal{N}$ Basen aller maximalen Λ-Teilgitter und füge diese zu $\mathcal{N}'$ hinzu (bzw. teste, ob sie bereits enthalten sind, und füge sie hinzu, sofern sie neu sind).
3. Teste für jedes $L' \in \mathcal{N}'$, ob $L' \subseteq L \cdot \mathfrak{p}$. Wenn ja, entferne es aus $\mathcal{N}'$.
4. Setze $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$.
5. Setze $\mathcal{N} := \mathcal{N}'$.

Beweis. Die Menge $\mathcal{L}$, die wir im Algorithmus konstruieren, ist offensichtlich gerade die Menge

$$\{L' \leq_\Lambda L \mid L' \nsubseteq L \cdot \mathfrak{p}\} \tag{3.1}$$

In Folgerung 2.4.23 hatten wir gesehen, dass die Menge der Äquivalenzklassen

$$\big\{\{L' \cdot \mathfrak{p}^z \mid z \in \mathbb{Z}\} \bigm| L' \ \Lambda\text{-Gitter in } K \otimes_R L\big\} \tag{3.2}$$

endlich ist. Die Menge in (3.1) ist offenbar ein Vertretersystem für die Äquivalenzklassen in (3.2), und daher auch endlich. Also terminiert der Algorithmus, und da alle Gitter in einer Äquivalenzklasse in (3.2) isomorph sind ist auch klar, dass jeder Isomorphietyp von Λ-Gittern in $K \otimes_R L$ in $\mathcal{L}$ mindestens einmal vorkommt. □

Bemerkung 3.2.9 *Für die Konstruktion der projektiv-unzerlegbaren Λ-Moduln sind wir vor allem an den irreduziblen Λ-Gittern mit einfachem Radikalquotienten interessiert. Diese können wir im vorangehenden Algorithmus direkt heraussuchen, da wir ja eh für jedes Gitter in $\mathcal{L}$ einmal alle maximalen Teilgitter berechnet haben, und somit wissen, welche ein eindeutiges maximales Teilgitter haben.*

Algorithmus 3.2.10 (Spinning) *Sei V ein A-Modul und $v_i, \ldots, v_z \in V$. Die folgenden Schritte liefern eine R-Basis für das Λ-Modulerzeugnis von $v_1, \ldots, v_z$, wo Λ als R-Algebra erzeugt wird von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$:*

Schritte.

1. Berechne eine R-Basis B von $X := \langle v_1, \ldots, v_z\rangle_R \subseteq V$.
2. Berechne eine R-Basis B' von $X' := \langle v_i \cdot \lambda_j \mid i = 1, \ldots, z,\ j = 1, \ldots, n\rangle_R$.
3. Teste ob $X = X'$. Wenn ja, jebe B' zurück. Ansonsten Ersetze X durch X' (und B durch B') und wiederhole Schritt 2.

Beweis. Offenbar konstruieren wir in Schritt 2 und 3 eine aufsteigende Kette von (endlich erzeugten) R-Moduln zwischen $\langle v_1, \ldots, v_z\rangle_R$ und $\langle v_1, \ldots, v_z\rangle_\Lambda$ (was sicher auch endlich erzeugt ist als R-Modul, da Λ als R-Modul endlich erzeugt ist). Da R noethersch ist, muss die Kette irgendwann stationär werden. In das der Fall ist gilt $X = X'$, der Algorithmus terminiert also. Wenn $X = X'$ gilt, gilt offenbar auch $X \cdot \Lambda = X$, und damit ist X dann ein Λ-Modul, es muss also $X = \langle v_1, \ldots, v_z\rangle_\Lambda$ gelten, da das der kleinste Λ-Modul ist, der $v_1, \ldots, v_z$ enthält. □

Bemerkung 3.2.11 (Anwendungen) *Folgende Anwendungen von Algorithmus 3.2.10 sind für uns besonders wichtig:*

(i) Wir können eine R-Basis von Λ berechnen, indem wir 3.2.10 für $M = A$ (aufgefasst als Λ-Rechtsmodul), $z = n + 1$ und $v_1 = 1_A, v_2 = \lambda_1, \ldots, v_{n+1} = \lambda_n$ durchführen.

(ii) Wir können für einen A-Modul V den Λ-Aufspann einer K-Basis berechnen und so ein volles Λ-Gitter in V legen. Wenn uns Λ durch Erzeuger in $\bigoplus_{i=1}^m K^{\dim_K V_i \times \dim_K V_i}$ gegeben ist, können wir so also insbesondere die Erzeuger in $\bigoplus_{i=1}^m R^{\dim_K V_i \times \dim_K V_i}$ konjugieren (was auch rechtfertigt, warum wir in den Generalvoraussetzungen davon ausgehen, dass wir Gitter L_i in V_i kennen).

3.3 Kondensation (insbesondere für Gruppenringe)

Für die Bestimmung der Basis-Ordnung von Λ macht es, wenn es möglich ist, Sinn, zuerst zu einem Morita-äquivalenten Ring kleinerer R-Dimension überzugehen. Dazu wollen wir ein Idempotent $e \in \Lambda$ benutzen (um zu $e\Lambda e$ überzugehen). Will man nur $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, Q)$ für zwei projektiv unzerlegbare Λ-Gitter P und Q bestimmen, kann man ausnutzen, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(P, Q) &\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(e_P\Lambda, e_Q\Lambda) \\ &\cong e_Q\Lambda e_P = e_Q e\Lambda e e_P \\ &\cong \mathrm{Hom}_{e\Lambda e}(e_P e\Lambda e, e_Q e\Lambda e) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{e\Lambda e}(P \cdot e, Q \cdot e) \end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei $e_P, e_Q \in \Lambda$ (primitive) Idempotente seien mit $e_P\Lambda \cong P$ und $e_Q\Lambda \cong Q$, und $e \in \Lambda$ ein Idempotent mit $e_Q e = e e_Q = e_Q$ und $e_P e = e e_P = e_P$. Alle Isomorphismen in (3.3) sind als $e_P\Lambda e_P$ - $e_Q\Lambda e_Q$-Bimodulhomomorphismen zu verstehen (wobei wir $\mathrm{End}_\Lambda(P) \cong e_P\Lambda e_P \cong \mathrm{End}_{e\Lambda e}(P\cdot e)$ und $\mathrm{End}_\Lambda(Q) \cong e_Q\Lambda e_Q \cong \mathrm{End}_{e\Lambda e}(Q\cdot e)$ jeweils miteinander identifizieren) und insbesondere als Ringhomomorphismen für $P = Q$ (und dann konsequenterweise $e_P = e_Q$). Da e_P und e_Q auch in $e\Lambda e$ primitiv sein müssen, sind $P\cdot e \cong_{e\Lambda e} e_P e\Lambda e$ und $Q\cdot e \cong_{e\Lambda e} e_Q e\Lambda e$ projektiv unzerlegbare $e\Lambda e$-Moduln.

Wir haben also in jedem Fall, auch wenn $e\Lambda e$ nicht Morita-äquivalent zu Λ ist, ein Interesse daran, die Basisordnung von $e\Lambda e$ zu bestimmen.

Satz 3.3.1 ([Noe05], Kapitel IV) *(i) Sei G eine endliche Gruppe, $C \leq G$ sei eine Untergruppe mit $p \nmid |C|$ (Wir nennen C auch* Kondensationsuntergruppe*). Weiter sei $\chi \in \mathrm{Irr}_K(C)$. Dann ist*

$$e_C := \frac{1}{|C|} \sum_{g \in C} \chi(g) g^{-1} \in Z(KC) \subseteq KG$$

ein Idempotent (aus der gewöhnlichen Darstellungstheorie bekannt). Es gilt sogar:

$$e_C \in RG$$

Somit haben wir für $\Lambda = RG$ einige Idenpotente gefunden. Fraglich ist noch, wie wir für $e_C RG e_C$ ein besseres Erzeugendensystem finden als eine R-Basis (die im allgemeinen groß sein wird).

(ii) Sei nun χ ein linearer Charakter von C, d. h. $\chi(1_C) = 1$. Weiter sei $N := N_G(C)$ der Normalisator von C in G und $T := T(e_C) := \{t \in N \mid t^{-1} \cdot e_C \cdot t = e_C\}$ die Trägheitsgruppe von e_C. Dann ist

$$E := \underbrace{\{\textit{Gruppenerzeugendensystem von } T/C\}}_{=:E_1} \cup \underbrace{\{\textit{Restklassenvertreter von } T\backslash G/T\}}_{=:E_2}$$

ein R-Algebrenerzeugendensystem von $e_C RG e_C$, bzw. genauer: $\{e_C g e_C \mid g \in E\}$ ist ein solches. Wir nennen E (bzw. $e_C E e_C$) auch ein träges Erzeugendensystem.

Beweis.

(i) Es ist bekannt, dass Charakterwerte ganz über $\mathbb{Z}$ sind, also in R liegen, denn R ist in $K = \mathrm{Quo}(R)$ ganz abgeschlossen (gilt allgemein für Hauptidealbereiche) und $\mathbb{Z} \subseteq R$. Ferner, da $p \nmid |C|$, gilt $\frac{1}{|C|} \in R$. Insgesamt gilt also $e_C \in RG$.

(ii) $e_C KC$ ist KC-Modul mit Charakter χ, also gilt $e_C \cdot g = e_C \cdot \chi(g)$ für alle $g \in C$ (denn χ ist als linearer Charakter ja auch bereits die zu $e_C KC$ gehörige Dartellung von KC).

Ist $g \in G$ so lässt sich g schreiben als $t_1 n t_2$ mit $t_1, t_2 \in T$ und $n \in E_2$. Ferner kann man t_i ($i \in \{1, 2\}$) schreiben als Produkt $t_i = t_i^{(1)} \cdots t_i^{(k_i)} \cdot c_i$ wo alle $t_i^{(j)}$ in E_1 liegen und $c_i \in C$, denn E_1 ist ja ein Gruppenerzeugendensystem von T/C. Wir haben also

$$e_C g e_C = e_C \cdot t_1^{(1)} \cdots t_1^{(k_1)} \cdot c_1 \cdot n \cdot t_2^{(1)} \cdots t_2^{(k_2)} \cdot c_2 \cdot e_C$$

Nun benutzen wir, dass alle $t_i^{(j)}$ mit e_C kommutieren (da sie in T liegen), dass $e_C^2 = e_C$ ist und dass $e_C c_i = e_C \chi(c_i)$ und erhalten

$$e_C g e_C = \underbrace{\chi(c_1 \cdot c_2)}_{\in R} \cdot \underbrace{e_C t_1^{(1)} e_C}_{\in E_1} \cdots \underbrace{e_C t_1^{(k_1)} e_C}_{\in E_1} \cdot \underbrace{e_C n e_C}_{\in E_2} \cdot \underbrace{e_C t_2^{(1)} e_C}_{\in E_1} \cdots \underbrace{e_C t_2^{(k_2)} e_C}_{\in E_1}$$

und folglich liegt $e_C G e_C$ (was $e_C RG e_C$ sogar als R-Modul erzeugt) im R-Algebrenerzeugnis von $e_C E e_C$, was zu zeigen war. □

Bemerkung 3.3.2 *Um zu testen, ob für ein Idempotent $e \in \Lambda$ der Modul $e\Lambda$ Progenerator ist, reicht es, zu überprüfen, dass e auf keinem einfachen Λ-Modul wie Null operiert (was wir testen können, sofern wir die Operationsmatrizen von e auf den einfachen Λ-Moduln ausrechnen können, was wir mit* GAP *oder* MAGMA *für Elemente in Gruppenringen können). Denn dann ist $\mathrm{Hom}_\Lambda(eA, S) \cong S \cdot e \neq \{0\}$ für alle einfachen Moduln S, und damit muss $\mathcal{P}(S)$ als direkter Summand in $e\Lambda$ vorkommen.*

Algorithmus 3.3.3 (Kondensation einer Darstellung) *Sei e ein Idempotent in Λ und $E \subset \Lambda$ eine endliche Teilmenge sodass $e\Lambda e$ von eEe als R-Algebra erzeugt wird. Weiter sei $\Delta : \Lambda \to R^{q\times q}$ eine Darstellung (Wichtig ist nur, dass wir die Bilder der Elemente aus E sowie das Bild von e berechnen können). Dann wird $R^{1\times q}$ durch Δ zu einem Λ-Modul M_Δ. $M_\Delta \cdot e$ ist dann ein $e\Lambda e$ Modul, dessen R-Dimension wir mit r bezeichnen. Durch Wahl einer Basis von $M_\Delta \cdot e$ bekommen wir also eine Darstellung $\tilde{\Delta} : e\Lambda e \longrightarrow R^{r\times r}$ die aus $R^{1\times r}$ einen $e\Lambda e$-Modul $M_{\tilde{\Delta}}$ macht, sowie eine Einbettung $M_{\tilde{\Delta}} = R^{1\times r} \xrightarrow{\iota} R^{1\times q} = M_\Delta$. Der folgende Algorithmus berechnet $\tilde{\Delta}(e \cdot x \cdot e) \in R^{r\times r}$ für $x \in E$ sowie $\iota \in R^{r\times q}$.*

Schritte.

1. Berechne $T := \mathrm{HermiteForm}(\Delta(e))$. Entferne alle Nullzeilen von T. Hänge dann Standardbasiszeilen an, die die Zeilen von T zu einer Basis von $R^{1\times n}$ ergänzen. Bezeichne das Ergebnis mit T_0. Es gilt $T_0 \in \mathrm{GL}(n, R)$.

2. Berechne $D(x) := T_0 \cdot \Delta(e) \cdot \Delta(x) \cdot \Delta(e) \cdot T_0^{-1} \in R^{q\times q}$ für alle $x \in E$.

3. Setzte $\tilde{\Delta}(e \cdot x \cdot e) := \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \cdot D(x) \cdot \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$ für $x \in E$ sowie $\iota := \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \cdot T_0$ und gebe diese zurück.

Beweis. Die ersten m Zeilen von T bilden eine Basis von $M_\Delta \cdot e$. $M_\Delta \cdot (1 - e)$ ist ein R-Modulkomplement on $M_\Delta \cdot e$ in M_Δ, d. h. es ist möglich diese zu einer Basis von M_Δ zu ergänzen. Das dies mit Standardbasiszeilen möglich ist folgt aus der Form der Hermite-Form (man ergänzt einfach die fehlenden Stufen). Schritt 1 ist damit klar. Wir können also $\iota = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \cdot T_0$ wählen. Dann ist das berechnete $\tilde{\Delta}(e \cdot x \cdot e)$ gerade $\iota\Delta(e \cdot x \cdot e)\iota^{-1}$, was die gesuchte Darstellung ist. $\square$

3.4 Konstruktion der Basisordnung

Nun wollen wir einen Algorithmus angeben, mit dessen Hilfe wir die projektiv-unzerlegbaren Λ-Moduln bestimmen können und aus den Homomorphismen zwischen diesen dann die Basisordnung von Λ. Wenn Λ ein Gruppenring ist, ist es im Allgemeinen sinnvoll, Λ zuerst zu kondensieren, und dann die Methoden anzuwenden, die gleich vorgestellt werden. Der erste Algorithmus macht Satz 2.6.2 konstruktiv:

Algorithmus 3.4.1 (Verkleben, vgl. Satz 2.6.2) *Seien $P = R^{1\times p}$ und $Q = R^{1\times q}$ zwei Λ-Gitter mit $\frac{P}{\mathrm{Jac}(P)} \cong \frac{Q}{\mathrm{Jac}(Q)} \cong S$ einfach, gegeben durch die zugehörigen Darstellungen $\Delta_P : \Lambda \longrightarrow R^{p\times p}$ und $\Delta_Q : \Lambda \longrightarrow R^{q\times q}$. Wir setzten zusätzlich voraus, dass P und Q keine gemeinsamen R-torsionsfreien epimorphen Bilder $\neq \{0\}$ haben.*

Daraus konstruieren wir ein volles Λ-Gitter $X \leq P \oplus Q = R^{1\times(p+q)}$ mit $\frac{X}{\mathrm{Jac}(X)} \cong S$ gegeben als Zeilenraum einer Matrix $T \in R^{(p+q)\times(p+q)}$. D. h. die zu X gehörige Darstellung ist

$$\Delta_X : \Lambda \longrightarrow R^{(p+q)\times(p+q)} : \lambda \mapsto T \cdot \begin{bmatrix} \Delta_P(\lambda) & 0 \\ 0 & \Delta_Q(\lambda) \end{bmatrix} \cdot T^{-1}$$

Schritte.

1. Bestimme Basen von $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, S) \subseteq F^{p\times \dim S}$ und $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q, S) \subseteq F^{q\times \dim S}$
2. Wähle Elemente $0 \neq \alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, S)$ und $0 \neq \beta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q, S)$, bestimme ein Linksinverses β_L von β (d. h. $\beta_L \cdot \beta = \mathrm{id}_S$).
3. Wähle eine Matrix $H \in R^{p\times q}$ mit $H \equiv \alpha \cdot \beta_L \pmod{\mathfrak{p}^{p\times q}}$ und eine Matrix $J_Q \in R^{q\times q}$ mit
$$\mathrm{Bild}\left(R^{1\times q} \xrightarrow{J_Q} R^{1\times q}\right) = \mathrm{Kern}\left(R^{1\times q} \xrightarrow{\beta} F^{1\times \dim S}\right)$$
4. Setze $T_0 := \left[\begin{array}{c|c} I_p & H \\ \hline 0 & J_Q \end{array}\right]$. Nun für $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$:
   (a) Setzte
   $$\Delta_l : \Lambda \longrightarrow R^{(p+q)\times(p+q)} : \lambda \mapsto T_l \cdot \left[\begin{array}{c|c} \Delta_P(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & \Delta_Q(\lambda) \end{array}\right] \cdot T_l^{-1}$$
   Das macht aus $R^{1\times(p+q)}$ einen Λ-Modul X_l.
   (b) Bestimme alle maximalen Teilmoduln von X_l, d. h. bekomme eine Liste $N_1, \ldots, N_t \in R^{(p+q)\times(p+q)}$ von Matrizen zurück, deren Zeilenraum je Basis eines maximalen Teilmoduls von $X_l = R^{1\times(p+q)}$ ist.
   (c) Für $s = 1, \ldots, t$ teste, ob $\det\left(\begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{HermiteForm}\left(N_s \cdot \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) \in R^*$ (d. h. ob die Projektion von $\mathrm{Bild}(N_s) \leq P \oplus Q$ auf P surjektiv ist). Ist das für ein s der Fall, so setze $T_{l+1} := N_s \cdot T_l$ und mache bei (a) weiter. Falls kein solches s existiert gebe $T := T_l$ zurück.

Beweis. Zuerst einmal ist zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(T_0)$ wirklich ein Teilmodul von $P \oplus Q = R^{1\times(p+q)}$ ist. Sei also $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(T_0) \cdot \lambda &= \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} I_p & H \\ 0 & J_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_P(\lambda) & 0 \\ 0 & \Delta_Q(\lambda) \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} \Delta_P(\lambda) & H \cdot \Delta_Q(\lambda) \\ 0 & J_Q \cdot \Delta_Q(\lambda) \end{bmatrix}\right) = \ldots \end{aligned}$$

$\mathrm{Bild}(J_Q) = \mathrm{Kern}(\beta)$ ist ein Teilmodul von Q, also ist $\mathrm{Bild}(J_Q \cdot \Delta_Q(\lambda)) \subseteq \mathrm{Bild}(J_Q)$ und damit existiert ein $A \in R^{q\times q}$ mit $A \cdot J_Q = J_Q \cdot \Delta_Q(\lambda)$. Nach Konstruktion ist

$$R^{1\times p} \xrightarrow{H} \frac{Q}{\mathrm{Kern}(\beta)} = \frac{R^{1\times q}}{\mathrm{Bild}(J_Q)}$$

ein Homomorphismus, also existiert ein $B \in R^{q\times q}$ mit $H \cdot \Delta_Q(\lambda) = \Delta_P(\lambda) \cdot H + B \cdot J_Q$. Es ist also

$$\begin{aligned}
\ldots &= \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} \Delta_P(\lambda) & \Delta_P(\lambda)\cdot H + B\cdot J_Q \\ 0 & A\cdot J_Q \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} \Delta_P(\lambda) & B \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_q & H \\ 0 & J_Q \end{bmatrix}\right) \\
&\subseteq \mathrm{Bild}\left(\begin{bmatrix} I_q & H \\ 0 & J_Q \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Bild}(T_0)
\end{aligned}$$

Folglich $\mathrm{Bild}(T_0)\cdot\lambda \subseteq \mathrm{Bild}(T_0)\ \forall \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{Bild}(T_0)$ ist also tatsächlich einen Λ-Modul.

Definiere $M_l := \frac{Q}{\mathrm{Bild}(T_l)\cap Q}$ (wir identifizieren $\mathrm{Bild}(T_l) \leq P \oplus Q$ wie oben). Mit dieser Definition ist insbesondere $M_0 = \frac{R^{1\times q}}{\mathrm{Bild}(J_Q)} \cong S$ und alle M_l haben einfachen Radikalquotienten S, da sie epimorphe Bilder von Q sind. Definiere $\varepsilon_l :\ M_l \longrightarrow M_{l-1}$ als den natürlichen Epimorphismus,

$$\psi_l^{(P)} :\ P \longrightarrow M_l :\ x \mapsto \{y \in Q \mid (x,y) \in \mathrm{Bild}(T_l)\} \in M_l$$

$$\psi_l^{(Q)} :\ Q \longrightarrow M_l :\ y \mapsto y + \mathrm{Bild}(T_l) \cap Q$$

$\psi_l^{(Q)}\varepsilon_l = \psi_{l-1}^{(Q)}$ und $\psi_l^{(P)}\varepsilon_l = \psi_{l-1}^{(P)}$ gelten offensichtlich, ebenso ist klar dass $\psi_l^{(Q)}$ surjektiv ist. Es muss noch gezeigt werden, dass $\psi_l^{(P)}$ surjektiv ist, denn dann sind alle Voraussetzungen von Satz 2.6.2 erfüllt. $\psi_l^{(P)}$ ist surjektiv, denn $\psi_l^{(P)} \cdot \varepsilon_l \cdot \ldots \cdot \varepsilon_1 = \psi_0^{(P)}$. Nun hat $\varepsilon_l \cdots \varepsilon_1 :\ M_l \longrightarrow S$ gerade $\mathrm{Jac}(M_l)$ im Kern. Wäre $\psi_l^{(P)}$ nicht surjektiv, so wäre $\mathrm{Bild}(\psi_l^{(P)}) \subseteq \mathrm{Jac}(M_l)$, also $\psi_l^{(P)} \cdot \varepsilon_l \cdot \ldots \cdot \varepsilon_1 = 0$ und damit $\psi_0^{(P)} = 0$. Nach Konstruktion ist aber $\mathrm{Bild}(\psi_0^{(P)}) = \mathrm{Bild}\left(P \xrightarrow{H} \frac{Q}{\mathrm{Bild}(J_Q)}\right) = \frac{Q}{\mathrm{Bild}(J_Q)}$, also $\psi_0^{(P)} \neq 0$. Folglich ist $\psi_l^{(P)}$ auch surjektiv. Wir konstruieren also ein System von Moduln im Sinne von Satz 2.6.2. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Abbruchbedingung, die in Teil 4. (c) des Algorithmus getestet wird äquivalent zur Maximalität des Systems ist.

Also angenommen $\mathrm{Bild}(T_l) \leq P \oplus Q$ hat keinen maximalen Teilmodul mit surjektiver Projektion auf P, aber trotzdem existiere ein Λ-Modul M_{l+1} und Morphismen ε_{l+1} (nicht injektiv), $\psi_{l+1}^{(P)}$ und $\psi_{l+1}^{(Q)}$, die unser System im Sinne von Satz 2.6.2 fortsetzen. Nach Konstruktion ist

$$\mathrm{Bild}(N_l) = \left\{(x,y) \in P \oplus Q \mid \psi_l^{(P)}(x) = \psi_l^{(Q)}(y)\right\}$$

und folglich wäre

$$Z := \left\{(x,y) \in P \oplus Q \mid \psi_{l+1}^{(P)}(x) = \psi_{l+1}^{(Q)}(y)\right\}$$

ein Teilmodul von Bild(N_{l+1}), denn

$$\psi_{l+1}^{(P)}(x) = \psi_{l+1}^{(Q)}(y) \Longrightarrow \varepsilon_{l+1}(\psi_{l+1}^{(P)}(x)) = \varepsilon_{l+1}(\psi_{l+1}^{(Q)}(y)) \Longleftrightarrow \psi_l^{(P)}(x) = \psi_l^{(Q)}(y)$$

Z liegt sogar echt in Bild(N_l), denn Kern(ε_{l+1}) $\neq \{0\} \Longrightarrow \exists 0 \neq m_0 \in$ Kern(ε_{l+1}), und da $\psi_{l+1}^{(Q)}$ surjetiv ist existiert ein $q_0 \in Q$ mit $\psi_{l+1}^{(Q)}(q_0) = m_0$. Also ist $(0, q_0) \notin Z$, aber $(0, q_0) \in$ Bild(N_l), denn $\psi_l^{(Q)}(q_0) = \varepsilon_{l+1}(\psi_{l+1}^{(Q)}(q_0)) = \varepsilon_{l+1}(m_0) = 0$. Ferner ist die Projektion von Z auf P surjektiv, da zu $x \in P$ wegen der Surjetivität $[\psi_{l+1}^{(Q)}]^{-1}(\psi_{l+1}^{(P)}(\{x\}))$ nichtleer ist.

Folglich existiert ein maximaler Teilmodul zwischen Z und Bild(N_l), und dieser hat dann natürlich auch surjektive Projektion auf P. Das ist ein Widerspruch. □

Algorithmus 3.4.2 (Konstruktion von $\mathcal{P}(S)$) *Sei S ein einfacher Λ-Modul, und sei* $\mathrm{End}_\Lambda(S) \cong F$. *Dann können wir die projektive Decke $\mathcal{P}(S)$ von S wie folgt konstruieren:*

Schritte.

1. Führe den Zentrierungsalorithmus für alle einfachen $K \otimes_R \Lambda$-Moduln $V_1, \ldots, V_m$ durch. Bezeichne die in V_i gefundenen Gitter mit einfachem Radikalquotienten isomorph zu S mit $Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,v(i)}$, $v(i) \in \mathbb{N}$.

2. Für $i = 1, \ldots, m$: Setzte $X_i := Q_{i,1}$. Für $j = 2, \ldots, \frac{D_{V_i,S}}{\dim_K \mathrm{End}_{K\otimes\Lambda}(V_i)}$:

   (a) Suche ein $z \in \{1, \ldots, v(i)\}$, sodass kein Epimorphismus $X_i \twoheadrightarrow Q_{i,z}$ existiert. Um das zu testen können wir eine R-Basis $(B_k)_k$ von $\mathrm{Hom}_\Lambda(X_i, Q_{i,z})$ berechnen und die Summe der Bilder $\sum_{k=1}^{k}$ Bild(B_k) berechnen. Wenn kein Epimorphismus existiert, liegen alle Bilder in Jac($Q_{i,z}$), und somit ist die Summe ungleich $Q_{i,z}$, ansonsten ist sie gleich $Q_{i,z}$.

   (b) Führe Algorithmus 3.4.1 für X_i und $Q_{i,z}$ durch, erhalte also ein volles Gitter $Y \subseteq X_i \oplus Q_{i,z}$ mit $\frac{Y}{\mathrm{Jac}(Y)} \cong S$.

   (c) Ersetzte X_i durch Y.

3. Setzte $X := X_1$. Für $i = 2, \ldots, m$: Führe Algorithmus 3.4.1 für X und X_i durch, erhalte also ein Gitter $Y \subseteq X \oplus X_i$ mit $\frac{Y}{\mathrm{Jac}(Y)} \cong S$, und ersetzte X durch Y.

4. Das konstruierte X ist nun die projektive Decke von S.

Beweis. Schritt 1 ist klar. Aus Folgerung 2.6.6 bzw. Bemerkung 2.6.7 folgt, dass Schritt 2 durchführbar ist (d. h. dass wir stets ein Gitter $Q_{i,z}$ finden, dass nicht epimorphes Bild des bis dahin konstruierten X_i ist). Dass in Schritt 3 Algorithmus 3.4.1 anwendbar ist, ist auch klar, denn hier gilt ja sogar in jedem Schritt $\mathrm{Hom}_{K\otimes_R\Lambda}(K\otimes_R X, K\otimes_R X_i)=\{0\}$. Das am Ende konstruierte Gitter X ist also ein volles Gitter in

$$\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus^{\frac{D_{V_i,S}}{\dim_K \mathrm{End}_{K\otimes\Lambda}(V_i)}} V_i$$

X hat also nach Brauerreziprokität dieselbe Dimension wie $\mathcal{P}(S)$, und es gilt $\frac{X}{\mathrm{Jac}(X)}\cong S$ nach Konstruktion. Nach Lemma 2.6.1 gilt also $X\cong_\Lambda \mathcal{P}(S)$. □

Bemerkung 3.4.3 *Auch wenn die Voraussetzung* $\mathrm{End}_\Lambda(S)\cong F$ *im letzten Algorithmus nicht erfüllt ist, können wir dennoch versuchen, auf diese Art und Weise* $\mathcal{P}(S)$ *zu konstruieren (natürlich müssen wir Schritt 2 gemäß Brauerreziprokität entsprechend anpassen). Wir haben dann lediglich keine Garantie dafür, dass wir in Schritt 2 (a) ein passendes Gitter finden. Selbst wenn wir keines finden, können wir Algorithmus 3.4.1 anwenden (mit einem Gitter* $Q_{i,z}$*, das epimorphes Bild des bis dahin konstruierten* X_i *ist), es ist dann lediglich nicht mehr sichergestellt, dass der Algorithmus terminiert.*

Bemerkung 3.4.4 *Wir können nun (vorausgesetzt* F *ist Zerfällungskörper für* $\frac{\Lambda}{\mathfrak{p}\cdot\Lambda}$*) die projektiven Decken aller einfachen* Λ*-Moduln* $S_1,\ldots,S_s$ *berechnen. Dann können wir*

$$\mathrm{End}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{P}(S_s))$$

bestimmen, was dann eine Basisordnung von Λ *ist. Mittels Bemerkung 3.2.4 bekommen wir diese Basisordnung auch in eine direkte Summe von Matrixringen über* K *eingebettet. Die Einträge dieser Matrizen müssen noch nicht in* R *liegen, aber das können wir mit dem Spinning-Algorithmus (Algorithmus 3.2.10) gemäß Bemerkung 3.2.11 immer erreichen. Das Problem, mit dem wir uns nun im Rest des Abschnittes beschäftigen ist, ein kleineres Erzeugendensystem für die Basisordnung zu bestimmen, als eine* R*-Basis (die wir mit dieser Bemerkung bekommen).*

Lemma 3.4.5 *Sei* Λ *eine volle* R*-Ordnung in* A*, wo* A *halbeinfach. Seien* $b_1,\ldots,b_{z_1}\in\Lambda$ *Urbilder einer* F*-Basis von* $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ *und* $c_1,\ldots,c_{z_2}\in\mathrm{Jac}(\Lambda)$ *Urbilder einer* F*-Basis von* $\frac{\mathrm{Jac}(\Lambda)}{\mathrm{Jac}(\Lambda)^2}$*. Dann gilt*

$$\Lambda = R[b_1,\ldots,b_{z_1},c_1,\ldots,c_{z_2}]$$

d. h. die Elemente $b_1,\ldots,b_{z_1},c_1,\ldots,c_{z_2}$ *erzeugen* Λ *als* R*-Algebra.*

Beweis. Bezeichne $R[b_1,\ldots,b_{z_1},c_1,\ldots,c_{z_2}]$ mit Γ. Es gilt offensichtlich $\Gamma\subseteq\Lambda$, und es gilt $\Gamma+\mathrm{Jac}(\Lambda)^2=\Lambda$. Also können wir den $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)^2}$-Modul $M:=\frac{\mathrm{Jac}(\Lambda)}{\mathrm{Jac}(\Lambda)^3}$ als $\frac{\Gamma+\mathrm{Jac}(\Lambda)^2}{\mathrm{Jac}(\Lambda)^2}$-Modul auffassen. Als socher wird er von Urbildern der Elemente in $\frac{\mathrm{Jac}(\Lambda)}{\mathrm{Jac}(\Lambda)^2}$ erzeugt (die wir mit

Elementen aus Γ identifizieren können), denn das ist gerade $\frac{M}{\mathrm{Jac}(M)}$. Wir können also folgern, dass sogar $\Gamma + \mathrm{Jac}(\Lambda)^3 = \Lambda$ gilt. Wir können die Argumentation iterieren und erhalten so

$$\Gamma + \mathrm{Jac}(\Lambda)^i = \Lambda$$

für alle $i \geq 1$. Es folgt

$$\Gamma + \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Jac}(\Lambda)^i = \Gamma + \{0\} = \Lambda$$

also $\Gamma = \Lambda$. □

Lemma 3.4.6 *$e_1, \ldots, e_s$ seien orthogonale Idempotente in Λ mit $e_1 + \ldots + e_s = 1_\Lambda$, sodass $e_1 + \mathrm{Jac}(\Lambda), \ldots, e_s + \mathrm{Jac}(\Lambda)$ die zentral-primitiven Idempotente in $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ sind (geht nach Lemma 2.4.2). Dann gilt $e_i \Lambda e_j \subseteq \mathrm{Jac}(\Lambda)$ für alle $i \neq j$.*

Beweis. Setze $\overline{\Lambda} := \frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ (halbeinfach), und $\overline{e}_i := e_i + \mathrm{Jac}(\Lambda) \in \overline{\Lambda}$ für $i = 1, \ldots, s$. Dann gilt $\frac{e_i \Lambda e_j + \mathrm{Jac}(\Lambda)}{\mathrm{Jac}(\Lambda)} \cong_R \overline{e}_i \overline{\Lambda} \overline{e}_j \cong_R \mathrm{Hom}_{\overline{\Lambda}}(\overline{e}_j \overline{\Lambda}, \overline{e}_i \overline{\Lambda}) \cong_R \{0\}$, denn $\overline{e}_i \overline{\Lambda}$ und $\overline{e}_j \overline{\Lambda}$ gehören nach Definition der $e_1, \ldots, e_s$ zu verschiedenen Wedderburnkomponenten von $\overline{\Lambda}$, es existieren also keine nicht-trivialen $\overline{\Lambda}$-Rechtsmodulhomomorphismen zwischen den beiden. □

Bemerkung 3.4.7 *Wenn Λ eine Basisordnung ist, wir eine Basis kennen sowie einen Satz primitiver Idempotente $e_1, \ldots, e_s$, so können wir Lemma 3.4.6 anwenden, denn nach Definition einer Basisordnung gilt $\frac{\Lambda_\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda_\Lambda)} \cong_\Lambda S_1 \oplus \ldots \oplus S_s$, und folglich muss gelten*

$$\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{End}_\Lambda(S)^{\mathrm{op}}$$

womit die zentral-primitiven Idempotente in $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ auch primitiv sind. Ferner sind offenbar alle Idempotente in dieser Algebra zentral. $e_1 + \mathrm{Jac}(\Lambda), \ldots, e_s + \mathrm{Jac}(\Lambda)$ sind sicher ein Satz primitiver Idempotente in $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$, es kann sich also nur um die zentral-primitiven handeln.

Wir können also mit Lemma 3.4.6 folgern, dass

$$\mathrm{Jac}(\Lambda) = \sum_{i \neq j} e_i \Lambda e_j + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Jac}(e_i \Lambda e_i)$$

Die $\mathrm{Jac}(e_i \Lambda e_i)$ müssen wir nun auf anderem Wege bestimmen, z. B. direkt über die Definition, d. h. als Schnitt aller maximalen Teilmoduln des regulären $e_i \Lambda e_i$-Rechtsmoduls (da wir wissen dass die $e_i \Lambda e_i \cong \mathrm{End}_\Lambda(e_i \Lambda)^{\mathrm{op}}$ lokale Ringe sind wissen wir sogar, dass ein eindeutiger maximaler Teilmodul im regulären Modul existiert, wir müssen also nicht einmal Schnitte ausrechnen).

Insgesamt können wir dann also eine Basis von $\mathrm{Jac}(\Lambda)$ angeben, und über Lemma 3.4.5 dann ein (potentiell) kleineres Erzeugendensystem von Λ als R-Algebra.

3.5 Selbstduale Ordnungen

Im Folgenden sei A eine halbeinfache K-Algebra, $u \in Z(A)^*$, und Γ eine volle R-Ordnung in A. Es gelte $\Gamma \subseteq \Gamma^{\sharp,u}$. Wir suchen R-Ordnungen Λ, die Γ umfassen sodass Λ bezüglich T_u selbstdual ist. Diese Bedingung werden wir jedoch noch leicht verallgemeinern. Den Zusatz "u" zur Spurbilinearform, Diskriminante und "$\sharp$" lassen wir im Folgenden stets weg. Die folgenden Lemmata sind die auf Γ-Γ-Bimoduln übertragene Version von einigen Sätzen in [Mor88], wo analoge Aussagen für $\mathbb{Z}G$-Moduln gezeigt werden (auch wenn die Methoden schon vor [Mor88] bekannt waren).

Definition 3.5.1 (Ganzes Gitter) *Ein volles Gitter X in A heißt* ganz, *wenn $X \subseteq X^\sharp$. Insbesondere ist X selbstdual genau dann, wenn X ganz ist und* $\operatorname{discr} X = R$ *gilt.*

Bemerkung 3.5.2 *Für ein volles Γ-Γ-Bigitter X in A ist stets auch $X^\sharp$ ein Γ-Γ-Bigitter in A, denn es gilt*

$$T(\gamma_1 \cdot y \cdot \gamma_2, x) = T(y, \underbrace{\gamma_2 \cdot x \cdot \gamma_1}_{\in X}) \in R$$

für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $x \in X$, $y \in X^\sharp$.

Bemerkung 3.5.3 *Sind $X \subseteq Y$ zwei volle Γ-Γ-Bigitter in A und gilt*

$$X \subsetneqq Z_1 \subsetneqq Z_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_k \subsetneqq Y$$

für Γ-Γ-Bigitter $Z_1, \ldots, Z_k$, so gilt auch

$$Y^\sharp \subsetneqq Z_k^\sharp \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_2^\sharp \subsetneqq Z_1^\sharp \subseteqq X^\sharp$$

und natürlich sind mit der letzten Bemerkung die $Z_i^\sharp$ alle Γ-Γ-Bigitter. Umgekehrt können wir auch eine Γ-Γ-Filtrierung von $\frac{X^\sharp}{Y^\sharp}$ zu einer Γ-Γ-Filtrierung von $\frac{Y}{X}$ dualisieren, und somit gilt

$$\operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{Y}{X} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{X^\sharp}{Y^\sharp}$$

Definition 3.5.4 (Maximale Gitter) *Wir nennen ein volles Γ-Γ-Bigitter X in A maximal, wenn es ganz ist, und kein ganzes Γ-Γ-Bigitter in A existiert, dass X echt umfasst. Der Begriff "maximal" hängt hier natürlich von der Ordnung Γ ab.*

Lemma 3.5.5 *Seien X und Y zwei maximale Γ-Γ-Bigitter in A. Dann gilt*

(i) $\operatorname{discr} X = \operatorname{discr} Y$

(ii) $\operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{X}{X \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{Y}{X \cap Y}$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $X + Y \cap X^\sharp$ ein ganzen Γ-Γ-Bigitter in A ist, das X umfasst. Wegen der Maximalität von X gilt also $X + Y \cap X^\sharp = X$, und damit $X \cap Y + X^\sharp \cap Y = X \cap Y$. Da trivialerweise $X^\sharp \cap Y \supseteq X \cap Y$ gilt, folgt also $X \cap Y = X^\sharp \cap Y$. Ananlog erhält man $X \cap Y = X \cap Y^\sharp$.

Nun haben wir nach Isomorphiesatz (für Γ-Γ-Bimdouln)

$$\frac{X}{X \cap Y} = \frac{X}{X \cap Y^\sharp} \cong \frac{X + Y^\sharp}{Y^\sharp} \tag{3.4}$$

und andererseits

$$\frac{Y}{Y \cap X} = \frac{Y}{Y \cap X^\sharp} = \frac{Y}{(X + Y^\sharp)^\sharp} = \frac{(Y^\sharp)^\sharp}{(X + Y^\sharp)^\sharp} \tag{3.5}$$

Nach 3.5.3 haben die rechten Seiten von (3.4) und (3.5) dieselbe Länge als Γ-Γ-Bimodul. Das zeigt (ii). Des weiteren wissen wir aus Bemerkung 2.4.14, dass die rechten Seiten von (3.4) und (3.5) als R-Moduln isomorph sind, also

$$\operatorname{length}_R \frac{X}{X \cap Y} = \operatorname{length}_R \frac{Y}{X \cap Y} \tag{3.6}$$

Aus Bemerkung 2.4.14 wissen wir des weiteren, dass

$$\operatorname{length}_R \frac{X^\sharp}{X} = \operatorname{length}_R \frac{R}{\operatorname{discr} X}$$

und folglich

$$\operatorname{length}_R \frac{R}{\operatorname{discr} X} = \operatorname{length}_R \frac{X^\sharp}{X} = \operatorname{length}_R \frac{(X \cap Y)^\sharp}{X \cap Y} - 2 \cdot \operatorname{length}_R \frac{X}{X \cap Y}$$

Die analoge Formel gilt auch für $\frac{R}{\operatorname{discr} Y}$, und damit folgt zusammen mit (3.6)

$$\operatorname{length}_R \frac{R}{\operatorname{discr} X} = \operatorname{length}_R \frac{R}{\operatorname{discr} Y}$$

was (i) zeigt. □

Bemerkung 3.5.6 *Lemma 3.5.5 sagt uns, dass wenn in A ein selbstdualer Γ-Γ-Bimodul existiert, dann ist jedes maximale Γ-Γ-Bigitter in A selbstdual. D. h. in diesem Fall entspricht die Suche nach allen selbstdualen Γ-Γ-Bigittern in A gerade der Suche nach den maximalen Γ-Γ-Bigittern in A, denn selbstduale Gitter sind sicher maximal. Ein maximales Γ-Γ-Bigitter finden wir aber per Definition indem wir aufsteigende Ketten von ganzen Γ-Γ-Bigittern konstruieren, bis die Kette nicht mehr fortgesetzt werden kann.*

Definition 3.5.7 (Abstand & Nachbarn) *Sind X und Y zwei maximale Γ-Γ-Bigitter in A, so definieren wir den* Abstand *von X und Y als*

$$\operatorname{dist}(X, Y) := \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{X}{X \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{Y}{X \cap Y}$$

Gilt $\operatorname{dist}(X, Y) = 1$, *so nennen wir X und Y* Nachbarn.

Bemerkung 3.5.8 *Wir können die maximalen Γ-Γ-Bigitter mit der obigen Definition als Knoten eines Graphen auffassen, wo wir sagen, dass zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind, wenn die zugeordneten Gitter Nachbarn sind.*

Lemma 3.5.9 *Der in der obigen Bemerkung definierte Graph ist zusammenhängend, das heißt zwei beliebigen Knoten sind durch einen Weg aus endlich vielen Kanten verbunden.*

Beweis. Seien X und Y zwei maximale Γ-Γ-Bigitter in A. Sei weiter

$$d := \operatorname{dist}(X, Y)$$

Wir behaupten, dass wenn $d > 1$, dann existiert ein Nachbar X' von X mit $\operatorname{dist}(X', Y) = d - 1$, was die Behauptung zeigen würde.

Sei also $d > 1$. Wir wählen einen maximales Γ-Γ-Biteilgitter M von X, sodass $X \cap Y \subsetneqq M \subsetneqq X$ und setzten

$$X' := M + M^\sharp \cap Y$$

X' ist ein ganzes Gitter (klar). Wir müssen nun zuerst zeigen, dass X' auch maximal ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\operatorname{length}_R \frac{X'}{M^\sharp \cap Y} = \operatorname{length}_R \frac{Y}{M^\sharp \cap Y}$$

denn danach können wir genau wie in Lemma 3.5.5 argumentierten, dass $\operatorname{discr} X' = \operatorname{discr} Y$, und Y ist per Voraussetzung maximal. Es gilt

$$\frac{X'}{M^\sharp \cap Y} = \frac{M + M^\sharp \cap Y}{M^\sharp \cap Y} \cong_R \frac{M}{M \cap M^\sharp \cap Y} = \frac{M}{M \cap Y}$$

und

$$\frac{Y}{M^\sharp \cap Y} \cong_R \frac{Y + M^\sharp}{M^\sharp} \cong_R \frac{(M^\sharp)^\sharp}{(Y + M^\sharp)^\sharp} = \frac{M}{M \cap Y^\sharp} = \frac{M}{M \cap Y}$$

wobei $M \cap Y^\sharp = M \cap Y$ daraus folgt, dass $Y + M \cap Y^\sharp$ ein ganzes Γ-Γ-Bigitter ist, das Y umfasst, also $Y + M \cap Y^\sharp = Y$ wegen der Maximalität von Y, und damit $Y \cap M + Y^\sharp \cap M = Y \cap M$. Wir haben jetzt also $\frac{X'}{M^\sharp \cap Y} \cong_R \frac{Y}{M^\sharp \cap Y}$ gesehen, und daraus folgt, dass X' maximal ist.

Nach Definition gilt $X' \cap X = M \cap X + M^\sharp \cap Y \cap X = M + X \cap Y = M$, und damit

$$\operatorname{dist}(X, X') = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{X}{X \cap X'} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \frac{X}{M} = 1$$

denn M war maximal in X gewählt. Also sind X und X' Nachbarn.

Zum Abstand von X' und Y: Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(X', Y) &= \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{Y}{X' \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{Y}{(M + M^\sharp \cap Y) \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{Y}{M^\sharp \cap Y} \\
&= \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{Y + M^\sharp}{M^\sharp} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{(M^\sharp)^\sharp}{(Y + M^\sharp)^\sharp} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{M}{M \cap Y^\sharp} \\
&= \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{M}{M \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{M}{X \cap Y} = \operatorname{length}_{\Gamma-\Gamma} \tfrac{X}{X \cap Y} - 1 = d - 1
\end{aligned}$$

womit die Aussage folgt. □

Bemerkung 3.5.10 *Sei Γ durch R-Algebrenerzeuger $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ gegeben, und $\Gamma^\sharp$ durch eine R-Basis $B = (B_1, \ldots, B_{\dim_K A})$. Wenn wir den Γ-Γ-Bimodul $\Gamma^\sharp$ als $\Gamma^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma$-Rechtsmodul auffassen, dann ist dieser offensichtlich isomorph zu $M := R^{1\times \dim_K A}$ mit der Operation von $\Gamma^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma$ gegeben durch*

$$\Delta_M : \Gamma^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma \longrightarrow R^{\dim_K A \times \dim_K A} : \begin{cases} \gamma_i \otimes 1_\Gamma \mapsto {}_B[- \mapsto \gamma_i \cdot -]_B \\ 1_\Gamma \otimes \gamma_i \mapsto {}_B[- \mapsto - \cdot \gamma_i]_B \end{cases}, \ i = 1, \ldots, n$$

Die Bilinearform T_u auf $\Gamma^\sharp$ induziert dann (durch zurückziehen) auch auf M eine Bilinearform, deren Grammatrix bezüglich der Standardbasis gerade $G := {}_B(T_u)^B$ ist. Wir können nun leicht

(i) Testen, ob ein gegebenes Teilgitter $N \leq M$ sein duales umfasst (d. h. $N^\sharp$ ganz ist). Denn steht in den Zeilen $\hat{N} \in R^{\dim M \times \dim M}$ eine Basis von N, so ist die Grammatrix von T_u bezüglich dieser Basis $G' = \hat{N} \cdot G \cdot \hat{N}^\top$, und es gilt $N \supseteq N^\sharp$ genau dann, wenn G'^{-1} in $R^{\dim M \times \dim M}$ liegt.

(ii) Wenn $N \leq_{\Gamma^{\mathrm{op}} \times_R \Gamma} M$ ganz ist, und ein maximales ganzes $\Gamma^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma$-Gitter in M, dann können wir alle Nachbarn von N ausrechnen, indem wir alle maximalen Teilgitter von N ausrechnen, deren duales berechnen, dann wiederum alle maximalen Teilgitter von diesen ausrechnen, und uns dann die heraussuchen, die ganz sind. Wenn wir eine Basis von diesen in $K \otimes_R M = K^{1\times \dim M}$ berechnen, so können wir testen, ob die jeweiligen Nachbarn zwischen $M^\sharp$ und L liegen, indem wir testen, ob alle Basiselemente in $R^{1\times \dim M}$ liegen.

Algorithmus 3.5.11 (Bestimmung aller maximalen Γ-Γ-Bigitter) *Sei Γ gegeben durch Erzeuger $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ und $B = (B_1, \ldots, B_{\dim_K A})$ sei eine R-Basis von $\Gamma^\sharp$. Definiere M wie in Bemerkung 3.5.10. Dann liefern die folgenden Schritte alle maximalen (ganzen) Γ-Γ-Bimoduln zwischen Γ und $\Gamma^\sharp$:*

Schritte. Setze zuerst $N := M$

1. Berechne alle maximalen $\Gamma^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma$-Teilmoduln von N, und teste, ob einer von diesen sein Duales umfasst. Wenn ja, ersetze N durch diesen Teilmodul und wiederhole den Schritt. Sonst weiter mit Schritt 2.

2. Setze $\mathcal{L} := \emptyset$ und $\mathcal{N} := \{N^\sharp\}$. Solange $\mathcal{N} \neq \emptyset$: Setze $\mathcal{N}' := \emptyset$. Berechne alle Nachbarn aller Elemente in $\mathcal{N}$, und füge diese, sofern sie nicht bereits in $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{L}$ liegen und sofern sie in M enthalten sind, zu $\mathcal{N}'$ hinzu. Ersetze dann $\mathcal{L}$ durch $\mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ durch $\mathcal{N}'$.

3. Die Elemente aus $\mathcal{L}$ entsprechen nun den maximalen ganzen Γ-Γ-Bigittern zwischen Γ und $\Gamma^\sharp$, indem wir das jeweilige Urbild unter dem Isomorphismus zwischen $\Gamma^\sharp$ und M nehmen, der von der Basis B hergestellt wird (vgl. Bemerkung 3.5.10).

Beweis. Die Korrektheit des Algorithmus folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Lemmatas. □

Bemerkung 3.5.12 *Wenn wir nach maximalen ganzen vollen Teilordnungen zwischen $\Sigma^\sharp$ und Σ in einer gegebenen Ordnung Σ suchen, die ihr Duales umfasst, so nehmen wir als Γ einfach das R-Algebrenerezugnis von $\Sigma^\sharp$, denn das ist in einer maximalen ganzen Teilordnung zwischen $\Sigma^\sharp$ und Σ stets auch noch enthalten, berechnen eine Basis von Γ und nehmen deren dual, um eine Basis für $\Gamma^\sharp$ zu bekommen. Jetzt sind die Voraussetzungen für obigen Algorithmus gegeben. D. h. wir finden alle maximalen Γ-Γ-Bigitter zwischen Γ und $\Gamma^\sharp$, und aus diesen können wir uns dann die heraussuchen, die unter Multiplikation abgeschlossen sind.*

Enthält $K \otimes_R \Sigma$ eine selbstduale Ordnung, so sind die gefundenen Ordnungen gerade alle selbstdualen Ordnungen zwischen $\Sigma^\sharp$ und Σ.

3.6 Isomorphietest für R-Ordnungen

Im Folgenden sei $d \in \mathbb{Z}_{>0}^m$ und $A = \bigoplus_{i=1}^m K^{d_i \times d_i}$. Wir wollen einen Algorithmus angeben, der es erlaubt zu testen, ob zwei volle R-Ordnungen Λ und Γ in A (o.B.d.A. beide in $\bigoplus_{i=1}^m R^{d_i \times d_i}$ enthalten und durch Erzeuger gegeben) als R-Algebren isomorph sind.

Lemma 3.6.1 *Sei Λ eine volle R-Ordnung in A und*

$$\varphi : \ \Lambda \hookrightarrow \Lambda$$

ein R-Algebrenmonomorphismus. Dann gilt: φ ist surjektiv, also ein R-Algebrenautomorphismus.

Beweis. Wähle eine R-Maximalordnung Γ in A die Λ umfasst. Nach dem Beweis von Definition 2.4.19 (Maximalordnung) und Lemma 2.4.21 ist Γ von der Form

$$\bigoplus_{i=1}^m T_i^{-1} \cdot R^{d_i \times d_i} \cdot T_i$$

wo $T_i \in \mathrm{GL}(d_i, K)$ für $i = 1, \dots, m$. Nun sieht man, dass Γ selbstdual ist bezüglich T_u mit $u = 1_A$, denn setzte $T := (T_1, \dots, T_m) \in A$, so gilt $T_u(T \cdot a \cdot T^{-1}, T \cdot b \cdot T^{-1}) = T_u(a, b)$, und somit ist $\Gamma^\sharp = T^{-1} \cdot (T \cdot \Gamma \cdot T^{-1})^\sharp \cdot T$, also folgt die Selbstdualität von Γ aus der von $\bigoplus_{i=1}^m R^{d_i \times d_i}$, welche man elementar überprüfen kann (Grammatrix aufstellen). Es gilt also nach Bemerkung 2.4.14 (v)

$$\mathrm{length}_R \frac{\Gamma}{\Lambda} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{length}_R \frac{R}{\mathrm{discr}\,\Lambda}$$

und selbiges gilt natürlich auch für jede andere R-Maximalordnung Γ' in A, die R umfasst.

Betrachte nun $\hat{\varphi} := \mathrm{id}_K \otimes \varphi : \ A \xrightarrow{\sim} A$ (K-lineare Fortsetzung von φ). Nun ist $\varphi^{-1}(\Gamma)$ ebenfalls eine R-Maximalordnung in A (Bemerkung 2.4.20). Da $\hat{\varphi}$ insbesondere ein R-Modulautomorphismus von A ist gilt

$$\mathrm{length}_R \frac{\hat{\varphi}^{-1}(\Gamma)}{\Lambda} = \mathrm{length}_R \frac{\Gamma}{\varphi(\Lambda)}$$

Andererseits ist die linke Seite wie wir eben festgestellt haben gleich $\mathrm{length}_R \frac{\Gamma}{\Lambda}$. Also gilt $\varphi(\Lambda) \leq_R \Lambda$ und

$$\mathrm{length}_R \frac{\Gamma}{\Lambda} = \mathrm{length}_R \frac{\Gamma}{\varphi(\Lambda)}$$

woraus $\Lambda = \varphi(\Lambda)$ folgt. □

Lemma 3.6.2 *Seien Λ und Γ seien volle R-Ordnungen in A. Dann gilt: Λ und Γ sind als R-Algebren genau dann isomorph, wenn ein Λ-Γ-Bimodul M existiert mit*

$$z \cdot m = m \cdot z \quad \forall z \in R, m \in M \tag{3.7}$$

sodass M als Λ-Linksmodul isomorph zu ${}_\Lambda\Lambda$ und als Γ-Rechtsmodul isomorph zu Γ_Γ ist.

Beweis. Zuerst die einfache Richtung: Sei $\varphi : \ \Lambda \xrightarrow{\sim} \Gamma$ ein R-Algebrenisomorphismus. Dann setze $M := \Gamma$ und definiere die Operationen von Λ und Γ wie folgt:

$$a \cdot m \cdot b := \varphi(a) \cdot m \cdot b \quad \forall a \in \Lambda, b \in \Gamma$$

wobei auf der rechten Seite dass Produkt im Ring Γ genommen wird. Bedingung (3.7) ist offensichtlich erfüllt. Als Γ-Rechtsmodul ist M trivialerweise isomorph zu Γ_Γ. Als Λ-Linksmodul induziert φ^{-1} einen Λ-Linksmodulhomomorphismus zwischen M und ${}_\Lambda\Lambda$. Diese Richtung der Behauptung ist damit gezeigt.

Sei nun M ein Λ-Γ-Bimodul, der Bedingung (3.7) erfüllt, und sei $\alpha : \ M \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda$ ein Λ-Linksmodulisomorphismus und $\beta : \ M \longrightarrow \Gamma_\Gamma$ ein Γ-Rechtsmodulisomorphismus. Wir behaupten:

$$\varphi : \ \Lambda \longrightarrow \Gamma : \ a \mapsto \beta(a \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma))$$

definiert einen R-Algebrenisomorphismus zwischen Λ und Γ. Dazu zeigen wir zuerst, dass φ ein R-Algebrenmonomorphismus ist. Seien dazu $a, b \in \Lambda$ und $r \in R$ beliebig. Zur Multiplikativität:

$$\begin{aligned}
\varphi(a) \cdot \varphi(b) &= \beta(a \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma)) \cdot \underbrace{\beta(b \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma))}_{\in\Gamma} \\
&\overset{(1)}{=} \beta(a \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma) \cdot \beta(b \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma))) \\
&\overset{(2)}{=} \beta(a \cdot \beta^{-1}(\beta(b \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma)))) \\
&= \beta(a \cdot b \cdot \beta^{-1}(1_\Gamma)) \\
&= \varphi(a \cdot b)
\end{aligned}$$

wobei wir in (1) und (2) benutzt haben, dass β und β^{-1} Γ-Rechtsmodulhomomorphismen sind.

Zur Additivität:

$$\varphi(a+b)=\beta((a+b)\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))=\beta(a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma)+b\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))=\beta(a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))+\beta(b\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))=\varphi(a)+\varphi(b)$$

Zur R-Linearität:

$$\varphi(r\cdot a)=\varphi(a\cdot r)=\beta(a\cdot r\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))\overset{(3.7)}{=}\beta(a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma)\cdot r)=\beta(a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))\cdot r=\varphi(a)\cdot r=r\cdot\varphi(a)$$

Weiter gilt

$$\varphi(1_\Lambda)=\beta(1_\Lambda\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))=\beta(\beta^{-1}(1_\Gamma))=1_\Gamma$$

Damit ist φ R-Algebrenhomomorphismus. φ ist des weiteren injektiv, denn

$$\begin{aligned} a\in\operatorname{Kern}(\varphi) &\Longrightarrow \beta(a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma))=0\\ &\Longrightarrow a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma)=0\\ &\Longrightarrow a\cdot\beta^{-1}(1_\Gamma)\cdot b=0 \quad \forall b\in\Gamma\\ &\Longrightarrow a\cdot m=0 \quad \forall m\in M\\ &\Longrightarrow a=0 \quad \text{denn } M\cong_\Lambda {}_\Lambda\Lambda \end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation ist auch

$$\psi:\ \Gamma\longrightarrow\Lambda:\ b\mapsto\alpha(\alpha^{-1}(1_\Lambda)\cdot b)$$

ein R-Algebrenmonomorphismus. Damit ist also $\varphi\cdot\psi$ ein R-Algebrenmonomorphismus von Λ in sich selbst. Mit Lemma 3.6.1 ist $\varphi\cdot\psi$ damit sogar bijektiv. Daraus folgt, dass φ surjektiv ist, denn wäre $\varphi(\Lambda)\subsetneqq\Gamma$, so wäre $\psi(\varphi(\Lambda))=\Lambda\subsetneqq\psi(\Gamma)\subseteq\Lambda$. Also ist $\varphi:\ \Lambda\longrightarrow\Gamma$ ein R-Algebrenisomorphismus. □

Lemma 3.6.3 *Sei Λ eine volle R-Ordnung in A und P ein Λ-Gitter. Dann gilt: $P\cong_\Lambda\Lambda_\Lambda$ genau dann, wenn $\dim_R P=\dim_R\Lambda=\sum_{i=1}^m d_i^2$ und*

$$\dim_F\operatorname{Hom}_\Lambda(P,S)=\dim_F\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda_\Lambda,S)=\dim_F S$$

für alle einfachen Λ-Moduln S.

Beweis. Analog zu Lemma 2.6.1 gilt, dass $P\cong\Lambda_\Lambda$ genau dann, wenn $\dim_R P=\dim_R\Lambda_\Lambda$ und $\frac{P}{\operatorname{Jac}(P)}\cong\frac{\Lambda_\Lambda}{\operatorname{Jac}(\Lambda_\Lambda)}$, da ein Epimorphismus von Λ_Λ auf $\frac{P}{\operatorname{Jac}(P)}$ zu einem Epimorphismus von Λ_Λ auf P liftet (epimorph, da das Bild $\frac{P}{\operatorname{Jac}(P)}$ erzeugt, und damit automatisch auch P, was eine Folgerung aus dem Nakayama-Lemma ist). Dieser Epimorphismus ist dann aus Dimensionsgründen injektiv. Für Details verweisen wir auf den Beweis Lemma 2.6.1.

Nun gilt, da für jedes Λ-Gitter M der Radikalquotient $\frac{M}{\operatorname{Jac}(M)}$ halbeinfach ist und jeder Homomorphismus auf einen einfachen Modul über $\frac{M}{\operatorname{Jac}(M)}$ faktorisiert, dass

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(M,S)\cong_F\operatorname{Hom}_\Lambda\left(\frac{M}{\operatorname{Jac}(M)},S\right)\cong_F\operatorname{End}_\Lambda(S)^{\text{Vfh. von } S \text{ als direkter Summand von } \frac{M}{\operatorname{Jac}(M)}}$$

Damit ist der Ismomorphietyp von $\frac{M}{\mathrm{Jac}(M)}$ durch die F-Dimensionen der $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, S)$ für die einfachen Λ-Moduln S eindeutig bestimmt.

Zu zeigen bleibt noch $\dim_F(\Lambda_\Lambda, S) = \dim_F S$, was aus dem Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(e \cdot \Lambda, V) \cong_R V \cdot e$$

für Idempotente $e \in \Lambda$ und Λ-Moduln V folgt, wenn wir $e = 1_\Lambda$ und $V = S$ setzen. $\square$

Bemerkung 3.6.4 *Seien Λ und Γ zwei volle R-Ordnungen in A und $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ ein R-Algebrenisomorphismus. Weiter sei $\hat{\varphi} : A \longrightarrow A$ seine K-lineare Fortsetzung (also ein K-Algebrenautomorphismus). Dann bildet $\hat{\varphi}$ die zentral-primitiven Idempotente in A auf ebendiese ab, und permutiert sie dabei möglicherweise. Gelte also*

$$\hat{\varphi}(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\pi(i)} \quad \textit{für ein } \pi \in S_m$$

Dann muss offensichtlich gelten $d_i = d_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wir können also einen K-Algebrenautomorphismus

$$\psi : \ A \longrightarrow A : \ (a_1, \ldots, a_m) \mapsto (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m)})$$

definieren, der die Wedderburnkomponenten "vertauscht". Dann bekommen wir eine R-Ordnung

$$\Lambda' := \psi(\Lambda)$$

Trivialerweise gilt $\Lambda' \cong \Lambda$ und $\psi^{-1} \cdot \varphi$ ist ein Isomorphismus zwischen Λ' und Γ, dessen K-lineare Fortsetzung jedes zentral-primitive Idempotent in A auf sich selber abbildet.

Wenn wir also testen wollen, ob zwei volle R-Ordnungen in A isomorph sind, können wir o.B.d.A. für jede mögliche "Vertauschung" der Wedderbunkomponenten im obigen Sinne testen, ob das zugehörige Λ' isomorph zu Γ ist vermöge eines Isomorphismus, der die zentral-primitiven Idempotente in A auf sich selber abbildet.

Definition 3.6.5 *Wir sagen, zwei volle R-Ordnungen in A sind* konjugiert, *wenn ein R-Algebrenisomorphismus zwischen ihnen existiert, dessen K-lineare Fortsetzung jedes zentral-primitive Idempotent in A auf sich selber abbildet (wir könnten auch zeigen, dass die Ordnungen dann tatsächlich durch Konjugation mit einem Element aus A^* auseinander hervorgehen).*

Lemma 3.6.6 *Seien Λ und Γ zwei volle R-Ordnungen in A und konjugiert. Dann kann ein Λ-Γ-Bimodul M, der die Voraussetzungen von Lemma 3.6.2 erfüllt, so gewählt werden, dass $K \otimes_R M$ als A-A-Bimodul isomorph ist zu A.*

Beweis. Sei $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ ein Isomorphismus mit $\varphi(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Setzte $M := \Gamma$ und definiere die Operation von Λ und Γ als

$$\lambda \cdot m \cdot \gamma := \varphi(\lambda) \cdot m \cdot \gamma \quad \text{für } m \in M, \lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma$$

wo auf der rechten Seite das Produkt in Γ genommen wird.

$B := A^{\mathrm{op}} \otimes_K A$ ist eine halbeinfache K-Algebra isomorph zu

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{m} K^{d_i \cdot d_j \times d_i \cdot d_j}$$

mit zentral-primitiven Idempotenten $\hat{\varepsilon}_{i,j} := \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$. Fassen wir $K \otimes_R M$ als B-Rechtsmodul auf mit Operation $m \cdot a \otimes b := a \cdot m \cdot b$, so sehen wir, dass $M \cdot \hat{\varepsilon}_{i,j} = \{0\}$ für $i \neq j$ und $\neq \{0\}$ für $i = j$. Wir können also folgern, dass die zu den zentral-primitiven Idempotenten $\hat{\varepsilon}_{i,i}$ gehörigen einfachen B-Moduln als direkte Summanden in $K \otimes_R M$ vorkommen, und die Summe der Dimensionen dieser einfache Moduln ist $\sum_{i=1}^{m} d_i^2$, was gleich $\dim_K K \otimes_R M$ ist, womit die einfachen Summanden alle Vielfachheit Eins haben müssen. Dasselbe Argument auf A als B-Rechtsmodul angewandt liefert $A \cong_B K \otimes_R M$. $\square$

Lemma 3.6.7 *Sei*

$$B := \bigoplus_{i=1}^{\tilde{m}} K^{\tilde{d}_i \times \tilde{d}_i}$$

und $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ ein B-Modul, sodass alls V_i einfach sind und $V_i \not\cong V_j$ für $i \neq j$. Weiter sei Σ eine volle R-Ordnung in B und $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k \subseteq V$ ein volles Σ-Gitter in V. Mit π_i für $i = 1, \ldots, k$ bezeichnen wir die Projektionen von V auf V_i Dann gilt: Die Menge

$$\mathcal{L} := \left\{ L' \subseteq L \;\middle|\; L' \text{ ist volles } \Sigma\text{-Gitter in } V \text{ und } \pi_i(L') \not\subseteq L_i \cdot \mathfrak{p}\ \forall i \right\}$$

ist endlich (und enthält von jeden Isomorphietyp von vollen Σ-Gittern in V mindestens einen Vertreter).

Beweis. Nach Jordan-Zassenhaus (Satz 2.4.24) existieren nur endlich viele Isomorphietypen von vollen Σ-Gittern in V. Seien X_1 und X_2 zwei isomorphe Gitter, die beide in $\mathcal{L}$ liegen. Wir behaupten, dass dann $\mathrm{length}_R \frac{L}{X_1} = \mathrm{length}_R \frac{L}{X_2}$ gilt, woraus die Aussage folgt, denn zu gegebenem Index existieren nur endlich viele R-Teilgitter in L mit diesem Index (dies ist eine Folgerung aus der Endlichkeit $\frac{R}{\mathfrak{p}}$). Sei also $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ ein Σ-Isomorphismus zwischen den Gittern. φ lässt sich K-linear zu einem B-Isomorphismus $\hat{\varphi} :\ V \longrightarrow V$. Nun gilt

$$\mathrm{End}_B(V) \cong \underbrace{K \oplus \ldots \oplus K}_{k \text{ mal}}$$

wo ein Element $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{End}_B(V)$ auf V wie folgt operiert:

$$x :\ V \longrightarrow V :\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto (v_1 \cdot x_1, \ldots, v_k \cdot x_k)$$

Schreiben wir also in diesem Sinne $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k)$, so sieht man leicht, dass $\hat{\varphi}_i \in R^*$ für alle i, denn sonst läge $\pi_i(X_2) = \pi_i(X_1) \cdot \hat{\varphi}_i$ entweder nicht in L_i (wenn $\hat{\varphi} \notin R$ gelten würde), oder unterhalb von $L_i \cdot \mathfrak{p}$ (wenn $\hat{\varphi}_i \in \mathfrak{p}$ gelten würde). Damit gilt also $\hat{\varphi}(L) = L$,

d. h. $\hat{\varphi}|_L$ induziert einen R-Gitterautomorphismus von L, der X_1 auf X_2 abbildet, womit der Index von X_1 in L sicher gleich dem von X_2 in L ist. □

Bemerkung 3.6.8 *Lemma 3.6.7 erlaubt offensichtlich eine Erweiterung des Zentrierungsalgorithmus auf Gitter in direkten Summen von irreduziblen Σ-Gittern, sofern die direkten Summanden als B-Moduln nicht isomorph sind.*

Algorithmus 3.6.9 (Konjugiertheitstest) *Seien Λ und Γ zwei volle R-Ordnungen in A gegeben durch Erzeuger $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(\Lambda)}) \in A^{n(\Lambda)}$ und $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n(\Gamma)}) \in A^{n(\Gamma)}$. Wir gehen o.B.d.A. davon aus, dass alle Erzeuger in $\bigoplus_{i=1}^m R^{d_i \times d_i} \subseteq A$ liegen. Mittels der folgenden Schritte lässt sich entscheiden, ob Λ und Γ konjugiert sind:*

Schritte.

1. Bezeichne mit Λ^{op} die R-Ordnung in A gegeben durch die Erzeuger $(\lambda_1^\top, \ldots, \lambda_{n(\Lambda)}^\top)$ (wobei wir mit "$^\top$" hier "in jeder Komponente transponieren" meinen). Berechne die einfachen Λ^{op}-Moduln $S_1, \ldots, S_{s(\Lambda^{\mathrm{op}})}$ und die einfachen Γ-Moduln $T_1, \ldots, T_{s(\Gamma)}$. Berechne ferner die Zerlegungsmatrizen $D^{(\Lambda^{\mathrm{op}})} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m \times s(\Lambda^{\mathrm{op}})}$ und $D^{(\Gamma)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m \times s(\Gamma)}$.

2. Stelle die R-Ordnung
$$\Sigma \subseteq \bigoplus_{j=1}^{m} R^{d_i^2 \times d_i^2}$$
gegeben durch die Erzeuger $(\lambda_1^\top \otimes \mathrm{id}_A, \ldots, \lambda_{n(\Lambda)}^\top \otimes \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \otimes \gamma_1, \ldots, \mathrm{id}_A \otimes \gamma_{n(\Gamma)})$ auf (wo mit "$\otimes$" hier das Kronecker-Produkt in jeder Komponente gemeint ist).

3. Bezeichne mit
$$\pi_i : \ A = \bigoplus_{j=1}^{m} K^{d_j \times d_j} \longrightarrow K^{d_i \times d_i}$$
die Projektion auf die i-te Komponente. Stelle die Σ-Gitter $M_i = R^{1 \times d_i^2}$ auf, wo die Operation der Erzeuger von Σ gegeben ist durch
$$\Delta_{M_i}(\lambda_j^\top \otimes \mathrm{id}_A) := \pi_i(\lambda_j)^\top \otimes \mathrm{id}_{K^{d_i \times d_i}}$$
und
$$\Delta_{M_i}(\mathrm{id}_A \otimes \gamma_j) := \mathrm{id}_{K^{d_i \times d_i}} \otimes \pi_i(\gamma_j)$$
Führe nun für jedes Gitter M_i den Zentrierungsalgorithmus durch, und erhalte also Mengen $\mathcal{L}_i$ von Teilgittern von M_i.

4. Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Teste für jedes $L \in \mathcal{L}_i$, ob
$$\dim_F \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(L|_{\Lambda^{\mathrm{op}}}, S_j) = \dim_F S_j$$

für die $j \in \{1, \ldots, s(\Lambda^{\text{op}})\}$ mit $D_{i,j}^{(\Lambda^{\text{op}})} \neq 0$ und

$$\dim_F \operatorname{Hom}_\Gamma(L|_\Gamma, T_j) = \dim_F T_j$$

für die $j \in \{1, \ldots, s(\Gamma)\}$ mit $D_{i,j}^{(\Gamma)} \neq 0$ (die Operation auf Λ^{op} bzw. Γ einzuschränken, bedeutet einfach, dass wir L als Λ^{op}-Modul auffassen und $\lambda_j^\top$ als $\Delta_L(\lambda_j^\top \otimes \mathrm{id}_A)$ operieren lassen, analog für Γ). Bezeichne mit $\mathcal{L}_i'$ die Menge der Gitter $L \in \mathcal{L}_i$, für die das der Fall ist.

5. Falls eine der Mengen $\mathcal{L}_i'$ leer ist, sind wir fertig und können sagen, dass Λ und Γ nicht isomorph sind (ohne Vertauschung der Komponenten). Ansonsten führe für jedes Tupel $(L_1, \ldots, L_m) \in \mathcal{L}_1' \times \ldots \times \mathcal{L}_m'$ folgende Schritte durch:

   (a) Führe für $L := L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$ einen leicht modifizierten Zentrierungsalgorithmus durch, wobei die einzige Modifikation ist, dass wir Gitter $L' \subseteq L$ nicht erst dann verwerfen, wenn $L' \subseteq L \cdot \mathfrak{p}$, sondern bereits dann, wenn $\pi_{L_i}(L') \neq L_i$, wobei $\pi_{L_i}: \ L \longrightarrow L_i$ die Projektion auf L_i bezeichne. Wir erhalten also eine Menge $\mathcal{L}$ von Σ-Gittern in L.

   (b) Teste für jedes $L' \in \mathcal{L}$, ob

   $$\dim_F \operatorname{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(L'|_{\Lambda^{\text{op}}}, S_j) = \dim_F S_j \quad \forall j = 1, \ldots, s(\Lambda^{\text{op}})$$

   und

   $$\dim_F \operatorname{Hom}_\Gamma(L'|_\Gamma, T_j) = \dim_F T_j \quad \forall j = 1, \ldots, s(\Gamma)$$

   Wenn beides erfüllt ist, dann können wir aufhören, und sagen, dass Λ und Γ konjugiert.

6. Wenn wir den Algorithmus im letzten Schritt nicht bereits beendet haben, so können wir jetzt sagen, dass Λ und Γ nicht konjugiert sind.

Beweis. Nach Lemma 3.6.2 und Lemma 3.6.6 sind Γ und Λ genau dann konjugiert, wenn es ein Λ-Γ-Bigitter $M \subseteq A$ gibt, dass als Λ-Linksgitter isomorph zu ${}_\Lambda\Lambda$ und als Γ-Rechtsgitter isomorph zu Γ_Γ ist. Wir werden im Folgenden nicht zwischen Λ-Γ-Bigittern und $\Lambda^{\text{op}} \otimes_R \Gamma$-Rechtsgittern unterscheiden. Wenn so ein Gitter existiert, dann ist $\varepsilon_i M \varepsilon_i$ als $\varepsilon_i\Lambda$-Linksgitter sicher isomorph zu ${}_{\varepsilon_i\Lambda}\varepsilon_i\Lambda$ und als $\varepsilon_i\Gamma$-Rechtsgitter isomorph zu $\varepsilon_i\Gamma_{\varepsilon_i\Gamma}$. Daher bestimmen wir in Schritt 3 alle Isomorphietypen $\varepsilon_i\Lambda^{\text{op}} \otimes_R \varepsilon_i\Gamma$-Rechtsgitter im einfachen $\varepsilon_i A^{\text{op}} \otimes_K \varepsilon_i A \cong K^{d_i^2 \times d_i^2}$-Rechtsmodul. Dann testen wir in Schritt 3, welche von diesen als Λ^{op}-Rechtsmoduln isomoph zu ${\Lambda^{\text{op}}}_{\Lambda^{\text{op}}}$ sind (was bei üblicher Identifikation von Λ^{op}-Rechtsmoduln mit Λ-Linksmoduln äquivalent dazu ist, dass diese Gitter als Λ-Linksgitter isomorph zu ${}_\Lambda\Lambda$ sind), und welche als Γ-Rechtsmodul isomorph zu Γ_Γ sind, wobei die Korrektheit unseres Tests aus Lemma 3.6.3 folgt. In den $\mathcal{L}_i'$ stehen also nach Schritt 4 alle Isomorphietypen, die für $\varepsilon_i M \varepsilon_i$ möglich wären. Daraufhin konstruieren wir in Schritt 5 (so denn M existiert) alle $\Lambda^{\text{op}} \otimes_R \Gamma$-Rechtsgitter in

$$\bigoplus_{i=1}^m \varepsilon_i M \varepsilon_i$$

mit surjektiven Projektionen auf die $\varepsilon_i M \varepsilon_i$, womit wir im Zweifelsfall M finden. Andersherum, wenn wir ein $\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_R \Gamma$-Rechtsgitter finden, dass in Schritt 5 (b) zur Beendung des Algorithmus führt, so folgt mit Lemma 3.6.2 und Lemma 3.6.3, dass Λ und Γ auch wirklich konjugiert sind. Dass Schritt 5 terminiert folgt aus Lemma 3.6.7. $\square$

Bemerkung 3.6.10 *Der obige Algorithmus kann verbessert werden, sodass er uns tatsächlich einen Isomorphismus zwischen* Λ *und* Γ *liefert, sofern diese isomorph sind.*

Dazu muss man allerding einen Γ*-Rechtsmodulisomorphismus zwischen dem* $L' \in \mathcal{L}'$ *in Schritt 5 (b), das zur Beendung des Algorithmus führt, und* Γ_Γ *finden (dazu können wir die eindimensionalen* F*-Teilräume von* $\frac{\mathrm{Hom}_\Gamma(L'|_\Gamma, \Gamma_\Gamma)}{\mathfrak{p} \cdot \mathrm{Hom}_\Gamma(L'|_\Gamma, \Gamma_\Gamma)}$ *durchlaufen bis wir ein invertierbares Element finden, und dann ein Urbild dieses Elements in* $\mathrm{Hom}_\Gamma(L'|_\Gamma, \Gamma_\Gamma)$ *wählen).*

Sei also $\varphi: \ L'|_\Gamma \longrightarrow \Gamma_\Gamma$ *ein* Γ*-Rechtsmodulisomorphismus, dann sagt uns der Beweis von Lemma 3.6.2, dass*

$$\psi: \ \Lambda \longrightarrow \Gamma: \ \lambda \mapsto \varphi(\lambda \cdot \varphi^{-1}(1_\Gamma))$$

ein R*-Algebrenisomorphismus zwischen* Λ *und* Γ *ist, und diesen können wir auf den Erzeugern* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(\Lambda)}$ *von* Λ *auswerten.*

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel listen wir drei der berechneten Basisordnungen auf. Zur Notation: Den Hauptblock von $\mathbb{Z}_pG$ bezeichnen wir mit $B_0(\mathbb{Z}_pG)$, die restlichen werden (unkanonisch) durchnummeriert (also $B_1(\mathbb{Z}_pG)$ etc.).

Die Basisordnungen von $B_1(\mathbb{Z}_2S_7)$ und $B_0(\mathbb{Z}_2M_{12})$ wurden ohne Kondensation bestimmt, $B_0(\mathbb{Z}_2S_8)$ wurde mit der Kondensationsuntergruppe $\langle(1,2,3)(4,5,6)\rangle$ zusammen mit dem trivialem Charakter kondensiert. Die Erzeugendensysteme sind jeweils Urbilder von Basen von $\frac{\Lambda}{\mathrm{Jac}(\Lambda)}$ und $\frac{\mathrm{Jac}(\Lambda)}{\mathrm{Jac}^2(\Lambda)}$, redundante Erzeuger (auch offensichtliche) wurden nicht entfernt.

Als zusätliche Invarianten geben wir die Loewy-Reihen der projektiv-unzerlegbaren Gitter und die Ext-Köcher an. Bei den Loewy-Reihen handelt es sich um die Vielfachheiten der einfachen Λ-Moduln als direkte Summanden in den halbeinfachen Quotienten $\frac{P\cdot\mathrm{Jac}(\Lambda)^i}{P\cdot\mathrm{Jac}(\Lambda)^{i+1}}$, wobei $i = 0, 1, \ldots$, und P ein projektiv-unzerlegbares Λ-Gitter ist. Da nach Satz von Jordan-Zassenhaus ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $l \in \mathbb{N}$ existieren muss, sodass $P \cdot \mathrm{Jac}(\Lambda)^k \cong_\Lambda P \cdot \mathrm{Jac}(\Lambda)^{k+l}$, werden die Loewly-Reihen irgendwann periodisch. Sofern wir den periodischen Teil gefunden haben, geben wir diesen an. Zur Bewandtnis der Ext-Köcher verweisen wir auf [Ben91].

4.1 Basisordnung von $B_1(\mathbb{Z}_2S_7)$

Zerlegungsmatrix

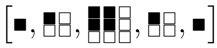
		6	8
		S_1	S_2
$(2,1^5)$	$\mathbb{Z}_2^{1\times1} =: \Gamma_1$	1	.
$(2^3,1)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times2} =: \Gamma_2$	1	1
$(4,1^3)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times3} =: \Gamma_3$	2	1
$(4,3)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times2} =: \Gamma_4$	1	1
$(6,1)$	$\mathbb{Z}_2^{1\times1} =: \Gamma_5$	1	.

Erzeuger

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5$$

wie folgt:

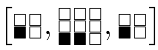


1	1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot \\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$	1	1
2	2	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot \\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$	2	2
·	·	$\begin{smallmatrix}\cdot & 2 \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}$	2	6

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$$

wie folgt:

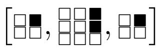


1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot\end{smallmatrix}$	2

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$$

wie folgt:

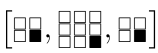


2	$\begin{smallmatrix}\cdot \\ 1\end{smallmatrix}$	3

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$$

wie folgt:



1	1	1

Loewy-Reihen

Der periodische Teil ist jeweils abgetrennt.

S_1	S_2
1	0
2	1
3	1
4	1
4	2
4	2
5	1

S_1	S_2
0	1
1	0
1	1
1	1
2	1
2	1
1	2

Ext-**Köcher**

$$\begin{tikzcd} \bullet_8 \arrow[d, bend right, "1"'] \\ \bullet_6 \arrow[u, bend right, "1"'] \arrow[loop left, "2"] \end{tikzcd}$$

4.2 Basisordnung von $B_0(\mathbb{Z}_2 S_8)$

Zerlegungsmatrix

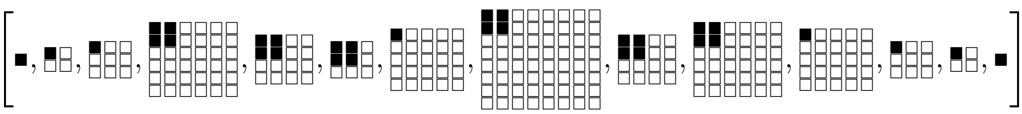
		1	6	14	8	40
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
(1^8)	$\mathbb{Z}_2^{1\times 1} =: \Gamma_1$	1	.	.	.	.
$(2,1^6)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_2$	1	1	.	.	.
$(2^2,1^4)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_3$	.	1	1	.	.
$(2^3,1^2)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_4$	.	1	1	1	.
(2^4)	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_5$	.	1	.	1	.
$(3,1^5)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_6$	1	1	1	.	.
$(3,2^2,1)$	$\mathbb{Z}_2^{6\times 6} =: \Gamma_7$	2	1	1	1	1
$(3^2,1^2)$	$\mathbb{Z}_2^{4\times 4} =: \Gamma_8$	2	.	1	.	1
$(3^2,2)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_9$	2	.	.	.	1
$(4,1^4)$	$\mathbb{Z}_2^{5\times 5} =: \Gamma_{10}$	1	2	1	1	.
$(4,2,1^2)$	$\mathbb{Z}_2^{8\times 8} =: \Gamma_{11}$	2	2	2	1	1
$(4,2^2)$	$\mathbb{Z}_2^{4\times 4} =: \Gamma_{12}$	2	.	1	.	1
$(4,3,1)$	$\mathbb{Z}_2^{6\times 6} =: \Gamma_{13}$	2	1	1	1	1
(4^2)	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_{14}$	.	1	.	1	.
$(5,1^3)$	$\mathbb{Z}_2^{5\times 5} =: \Gamma_{15}$	1	2	1	1	.
$(5,3)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_{16}$	.	1	1	1	.
$(6,1^2)$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_{17}$	1	1	1	.	.
$(6,2)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_{18}$	.	1	1	.	.
$(7,1)$	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_{19}$	1	1	.	.	.
(8)	$\mathbb{Z}_2^{1\times 1} =: \Gamma_{20}$	1	.	.	.	.

Erzeuger

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1),\mathcal{P}(S_1))^\top$: Eingebettet in

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{19} \oplus \Gamma_{20}$$

wie folgt:

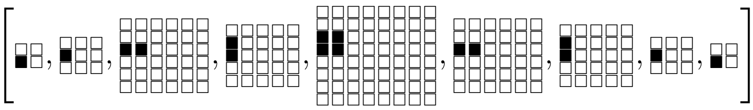


1	1	1	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	1	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&\cdot\\\cdot&1\end{smallmatrix}$	1	1	1	1
2	2	2	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	2	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\\cdot&2\end{smallmatrix}$	2	2	2	2
.	.	2	$\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\1&\cdot\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\cdot&6\\\cdot&4\end{smallmatrix}$	2	$\begin{smallmatrix}\cdot&2\\\cdot&4\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&\cdot\\2&6\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}30&12\\25&10\end{smallmatrix}$	.	.	2	66

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{19}$$

wie folgt:

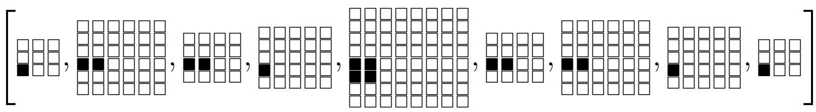


1	8	· 8	· 1	· · 6 ·	· 3	48 8	1	88

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{17}$$

wie folgt:

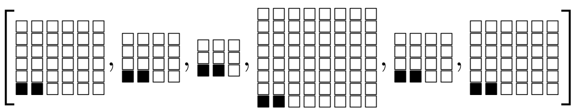


2	2 ·	2 2	2	2 2 11 13	1 3	7 12	6	62

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_5))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13}$$

wie folgt:

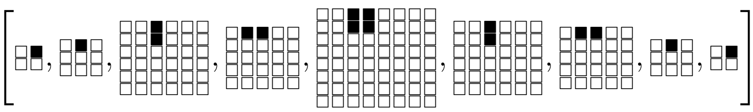


· 1	1 ·	1 ·	3 4	1 6	48 62

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{19}$$

wie folgt:

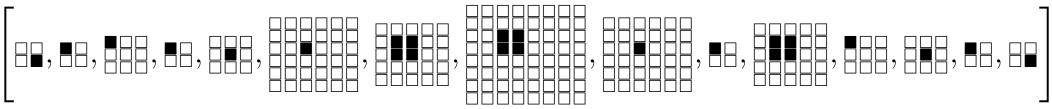


8	1	$\begin{smallmatrix}1\\ \cdot\end{smallmatrix}$	$8\ \cdot$	$\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot\\ 6 & \cdot\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}8\\ \cdot\end{smallmatrix}$	1 2	8	3

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{14} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{18} \oplus \Gamma_{19}$$

wie folgt:

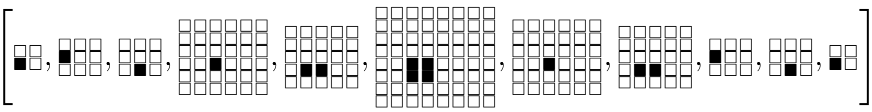


1	1	1	1	1	1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot\\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot\\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$	1	1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot\\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot\\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot\\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$	2	2	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot\\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$	2	2	2	2
·	·	·	·	·	·	$\begin{smallmatrix}\cdot & 2\\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2 & 6\\ 2 & 6\end{smallmatrix}$	2	2	$\begin{smallmatrix}38 & 22\\ 26 & 42\end{smallmatrix}$	2	6	14	102

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{18}$$

wie folgt:

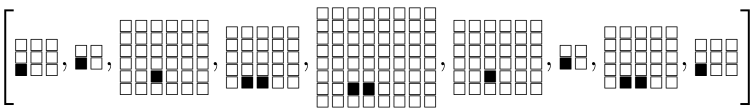


1	2	1	3	8 8	$\begin{smallmatrix}2 & 2\\ 7 & 5\end{smallmatrix}$	12	7 3	5	8	30

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_4))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{14} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16}$$

wie folgt:

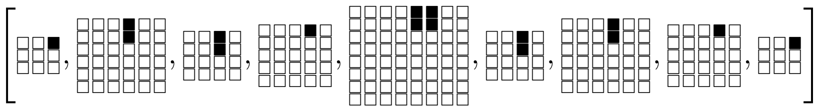


1	1	1	1 ·	1 6	2	6	21 2	14

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3),\mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{17}$$

wie folgt:

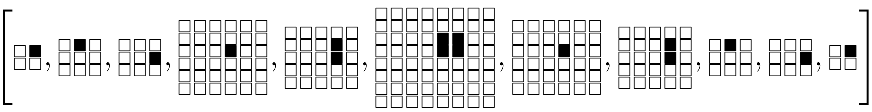


2	· 1	1 ·	2	3 2 4 4	2 4	· 18	6	14

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3),\mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{18}$$

wie folgt:

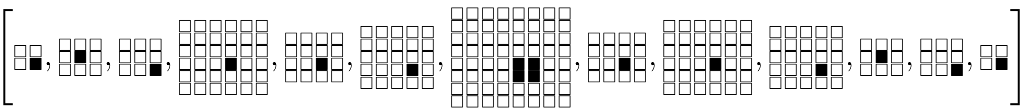


2	1	8	12	1 ·	3 2 3 6	3	8 16	10	1	15

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3),\mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{17} \oplus \Gamma_{18}$$

wie folgt:

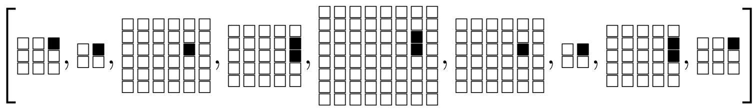


1	1	1	1	1	1	1 · · 1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2 · · 2	2	2	2	2	2	2
·	4	·	·	·	8	2 · 5 4	2	14	6	6	30	2

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_4),\mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{14} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16}$$

wie folgt:

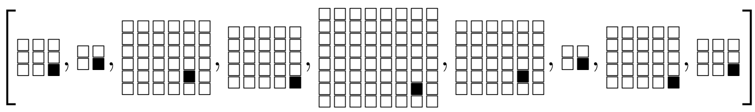


2	2	2	· 1	6 3	3	9	58 23	9

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_4), \mathcal{P}(S_4))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13} \oplus \Gamma_{14} \oplus \Gamma_{15} \oplus \Gamma_{16}$$

wie folgt:

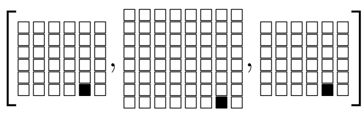


1	1	1	1	1	1	1	1	1
·	2	6	·	4	2	6	8	8

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_4), \mathcal{P}(S_5))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_7 \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13}$$

wie folgt:

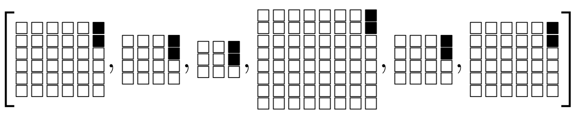


1	4	40

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_5), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13}$$

wie folgt:

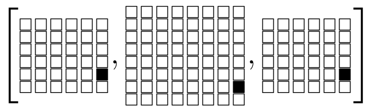


2 ·	· 1	· 1	4 5	6 7	7 24

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_5), \mathcal{P}(S_4))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_7 \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{13}$$

wie folgt:

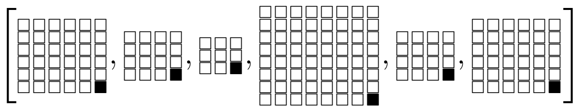


8	4	5

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_5), \mathcal{P}(S_5))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{12} \oplus \Gamma_{13}$$

wie folgt:



1	1	1	1	1	1

Loewy-Reihen

Hier wurden nur die ersten 5 Schichten berechnet, es ist daher kein periodischer Teil eingezeichnet.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
1	0	0	0	0
2	1	1	0	1
5	3	2	1	1
8	4	3	2	1
9	6	4	1	2

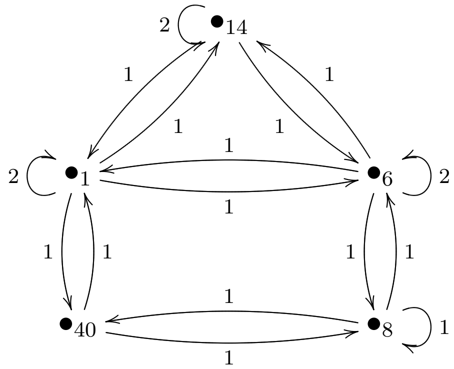
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0	1	0	0	0
1	2	1	1	0
3	4	2	1	0
4	6	4	2	1
6	8	5	3	1

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0	0	1	0	0
1	1	2	0	0
2	2	3	1	1
3	4	3	1	1
4	5	5	2	0

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	2	0
2	2	1	1	0
1	3	2	2	1

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1

Ext-**Köcher**



4.3 Basisordnung von $B_0(\mathbb{Z}_2 M_{12})$

Zerlegungsmatrix

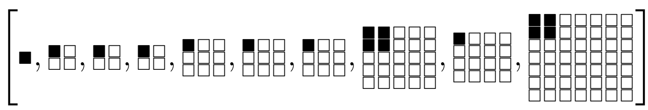
		1	10	44
		S_1	S_2	S_3
1	$\mathbb{Z}_2^{1\times 1} =: \Gamma_1$	1	.	.
11	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_2$	1	1	.
$11'$	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_3$	1	1	.
45	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_4$	1	.	1
54	$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} =: \Gamma_5$	.	1	1
55	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_6$	1	1	1
$55'$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_7$	1	1	1
$55''$	$\mathbb{Z}_2^{3\times 3} =: \Gamma_8$	1	1	1
66	$\mathbb{Z}_2^{5\times 5} =: \Gamma_9$	2	2	1
99	$\mathbb{Z}_2^{4\times 4} =: \Gamma_{10}$	1	1	2
120	$\mathbb{Z}_2^{7\times 7} =: \Gamma_{11}$	2	3	2

Erzeuger

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

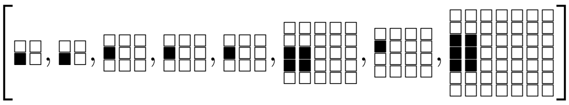


1	1	1	1	1	1	1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot \\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$	1	$\begin{smallmatrix}1 & \cdot \\ \cdot & 1\end{smallmatrix}$
2	2	2	2	2	2	2	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot \\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$	2	$\begin{smallmatrix}2 & \cdot \\ \cdot & 2\end{smallmatrix}$

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

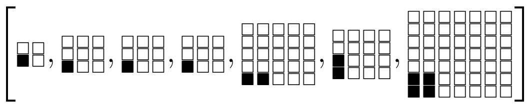


1	·	4	8	1	· · 1 14	2	2 2 · · 3 ·
·	1	·	4	1	1 2 · 12	6	4 2 2 · 2 1

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

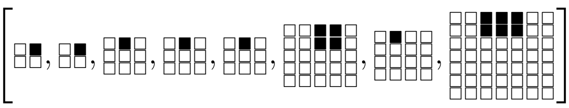


1	2	2	1	1 4	3 5	· 2 3 3

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

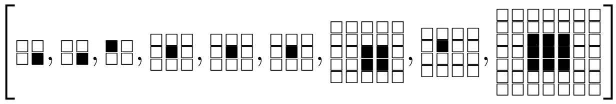


4	·	1	·	4	6 4 3 ·	6	· · · 1 2 2
·	4	·	3	4	4 6 · 7	10	1 · · · · 4

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

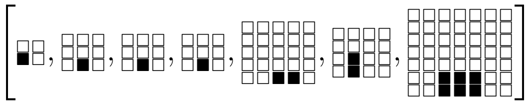


1	1	1	1	1	1	1 · · 1	1	1 · · · 1 · · · 1
2	2	2	2	2	2	2 · · 2	2	2 · · · 2 · · · 2
·	2	·	·	6	2	2 6 · 2	14	· · · 1 2 2 1 3 6

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_2), \mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

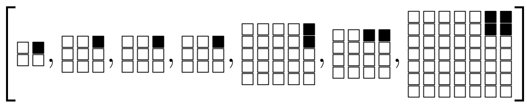


1	1	1	1	3 3	· 5	· · 2 · 1 ·

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3), \mathcal{P}(S_1))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

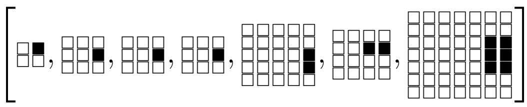


4	2	2	8	4 ·	8 20	3 2 1 4

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3), \mathcal{P}(S_2))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:

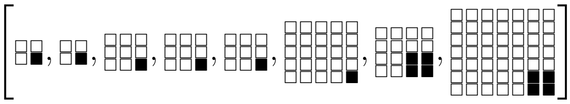


2	4	4	2	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 & 26 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot & 6 \\ 1 & \cdot \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}$

Elemente in $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{P}(S_3), \mathcal{P}(S_3))^\top$**:** Eingebettet in

$$\Gamma_4 \oplus \Gamma_5 \oplus \Gamma_6 \oplus \Gamma_7 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_9 \oplus \Gamma_{10} \oplus \Gamma_{11}$$

wie folgt:



1	1	1	1	1	1	$\begin{smallmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{smallmatrix}$
2	2	2	2	2	2	$\begin{smallmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{smallmatrix}$
·	·	2	2	2	·	$\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}$

Loewy-Reihen

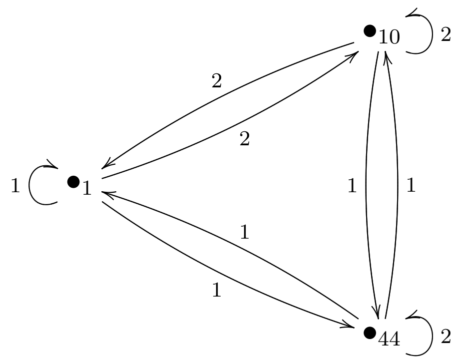
Hier wurden nur die ersten 10 Schichten berechnet, es ist daher kein periodischer Teil eingezeichnet.

S_1	S_2	S_3
1	0	0
1	2	1
5	3	3
7	6	4
9	8	6
9	8	7
13	9	6
9	11	7
10	8	9
13	11	5

S_1	S_2	S_3
0	1	0
2	2	1
3	4	3
6	6	4
8	9	5
8	9	7
9	11	7
11	11	7
8	11	8
11	11	7

S_1	S_2	S_3
0	0	1
1	1	2
3	3	3
4	4	5
6	5	6
7	7	6
6	7	8
7	7	8
9	8	7
5	7	9

Ext-**Köcher**



Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Aufgabenstellung selbständig bearbeitet und keine außer den angegebenen Hilfsmitteln verwendet habe.

Aachen, 28. September 2008

Literaturverzeichnis

[BCP97] Bosma, Wieb, John Cannon und Catherine Playoust: *The Magma algebra system. I. The user language.* J. Symbolic Comput., 24(3–4):235–265, 1997.

[Ben91] Benson, D. J.: *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1991.

[GAP07] The GAP Group: *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10*, 2007. `http://www.gap-system.org`.

[Lan85] Lang, Serge: *Algebra.* Nummer 211 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, Revised 3rd Auflage, 1985.

[Mor88] Morales, Jorge: *Maximal hermitian forms over* $\mathbb{Z}G$. Commentarii Mathematici Helvetici, 1988.

[Neb99] Nebe, Gabriele: *Orthogonale Darstellungen endlicher Gruppen und Gruppenringe*, 1999. Habilitationsschrift, RWTH Aachen.

[Nic] Nickerson, Simon: *An Atlas of Characteristic Zero Representations.* `http://web.mat.bham.ac.uk/S.Nickerson/rep/index.html`.

[NK07] Nebe, Gabriele und Matthias Künzer: *Modulare Darstellungstheorie*, WS 06/07. Vorlesungsskript, RWTH Aachen.

[Noe05] Noeske, Felix: *Morita-Äquivalenzen in der algorithmischen Darstellungstheorie.* Doktorarbeit, RWTH Aachen, 2005.

[Ple83] Plesken, Wilhelm: *Group Rings of Finite Groups Over p-Adic Integers.* Nummer 1026 in *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1983.

[Rei75] Reiner, Irving: *Maximal Orders.* Academic Press Inc., 1975.

[Wil] Wilson, R.: *The Modular Atlas Homepage.* `http://www.math.rwth-aachen.de/~MOC/`.